B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXII, 2

SAMMLUNG VON AUFGABEN ZUR ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

VON

FRIEDRICH DINGELDEY
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DARMSTADT

ZWEITER TEIL

AUFGABEN ZUR ANWENDUNG DER INTEGRALRECHNUNG

MIT 96 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Vorwort.

Die Grundsätze, die ich bei der Ausarbeitung des der *Differentialrechnung* gewidmeten und im Jahre 1910 erschienenen ersten Teiles meiner Aufgabensammlung befolgte, waren für mich auch bei dem vorliegenden zweiten Teile, der die Aufgaben zur Anwendung der *Integralrechnung* enthält, maßgebend. Da diese Grundsätze im Vorwort zum ersten Teile erwähnt sind, kann ich mich nun auf diesen Hinweis beschränken.

Besonderen Dank sage ich dem Studierenden der Elektrotechnik Herrn Paul Hammerschmidt, der die Figuren 63, 64, 70, 71, 74 und 95 gezeichnet hat.

Ferner ist es mir eine angenehme Pflicht Herrn Privatdozenten Dr.-Ing. Victor Blaeß und Herrn Professor Dr. Jakob Horn meinen herzlichsten Dank auszusprechen für ihre bereitwillige und sorgfältige Hilfe bei der Korrektur. Herr Blaeß hat das ganze Buch im Fahnensatz durchgesehen, Herr Horn hat die zweite Korrektur gelesen; beiden verdanke ich zahlreiche Anregungen und Verbesserungen.

Auch der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner sage ich meinen besten Dank für die mustergültige Drucklegung und die schöne Ausstattung des Buches.

Darmstadt, den 22. Mai 1913.

F. Dingeldey.

Inhalt.[1]

1) Ein ausführliches Sachregister befindet sich am Schluß des Bandes.

§ 1.

Einige allgemeine Regeln. Integration der Potenz.

1. Bedeutet a eine beliebige Konstante, so ist

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

2. Sind in endlicher Anzahl n irgend welche Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ der unabhängigen Veränderlichen x gegeben und werden diese Funktionen der Reihe nach mit beliebigen positiven oder negativen Konstanten (Koeffizienten) $a_1, a_2, \ldots a_n$ multipliziert und alsdann addiert, so gilt für die Integration der so entstehenden *Summe* von Funktionen die Regel:

$$\int(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n)\,dx = \int a_1 u_1\,dx + \int a_2 u_2\,dx + \cdots + \int a_n u_n\,dx$$
$$= a_1\int u_1\,dx + a_2\int u_2\,dx + \cdots + a_n\int u_n\,dx.$$

3. Hat das „unbestimmte" Integral

$$\int f(x)\,dx$$

den Wert $F(x) + C$, wo C eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet, so gilt für das von $x = a$ bis $x = b$ erstreckte *bestimmte Integral* des Differentials $f(x)dx$ die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b einschließlich der Grenzen endlich und stetig sind.

Die Berechnung von $F(b) - F(a)$ wird im folgenden häufig durch $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ oder noch kürzer durch $[F(x)]_a^b$ angedeutet.

4. Bei Vertauschung der Grenzen eines bestimmten Integrals besteht die Formel

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Ist m eine zwischen a und b gelegene Zahl, so gilt die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx.$$

6. Ein ebenes Flächenstück sei begrenzt durch den ganz auf einer Seite der x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegenen Bogen AB der Kurve $y = f(x)$, durch die zu den Endpunkten A, B des Bogens gehörigen Ordinaten MA, NB und das Stück MN der x-Achse (Fig. 1). Haben die Punkte A, B die Abszissen a bzw. b, so besteht für den Inhalt F des so begrenzten Flächenstücks[1]) die Formel

$$F = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Fig. 1.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von a bis b einschließlich der Grenzen eindeutig, endlich und stetig sei.

Ist die Gleichung der Kurve auf schiefwinklige Koordinaten mit dem Achsenwinkel ω bezogen, so ist der Inhalt F des durch den Bogen AB, die zur y-Achse parallelen Ordinaten MA, NB und das Stück MN der Abszissenachse begrenzten Flächenstücks durch die Formel

$$F = \sin\omega \int_a^b f(x)\,dx$$

gegeben.

Bei den später folgenden Beispielen wird für ein in der soeben angegebenen Weise begrenztes Flächenstück der kurze Ausdruck „Fläche der Kurve $y = f(x)$ für das Intervall von a bis b“ gebraucht.

7. Für die Integration der *Potenz* x^n, deren Exponent n eine beliebige konstante Zahl, $n = -1$ ausgenommen, bedeutet, gilt die Formel

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Im Falle $n = -1$ besteht die Formel

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,$$

1) Ausführlicher wird die Berechnung des Inhalts ebener Flächenstücke in § 15 behandelt.

in der x positiv vorausgesetzt ist[1]); bei negativem x müßte man

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C$$

schreiben.

Beispiele.

1. $$\int x^3 dx = \tfrac{1}{4} x^4 + C.$$ [2])

2. $$\int 7x^6 dx = x^7.$$

3. $$\int (ax^2 + 2bx + c)\,dx = \tfrac{1}{3} ax^3 + bx^2 + cx;$$

insbesondere ist

$$\int c\,dx = cx.$$

4. Welche Funktion $F(x)$ hat die Ableitung $3x^2 - 5x + 8$ und nimmt für $x = 2$ den Wert 5 an?

$$F(x) = \int (3x^2 - 5x + 8)\,dx = x^3 - \tfrac{5}{2} x^2 + 8x + C.$$

Da für $x = 2$ diese Funktion gleich 5 werden soll, findet man $C = -9$, somit

$$F(x) = x^3 - \tfrac{5}{2} x^2 + 8x - 9.$$

5. $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}.$$

6. $$\int \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}}, \quad \text{falls } n \neq +1 \text{ ist.}$$

7. $$\int \frac{5x^3 - 8x^2 - 3x + 4}{x}\,dx = \frac{5}{3} x^3 - 4x^2 - 3x + 4\ln x.$$

8. Welche Funktion $F(x)$ hat die Ableitung $\frac{3}{x} + 5$ und für $x = 1$ den Wert 2?

$$F(x) = \int \left(\frac{3}{x} + 5\right) dx = 3\ln x + 5x + C,$$

wobei $C = -3$ gefunden wird.

9. $$\int_1^2 3x^4\,dx = \left[\tfrac{3}{5} x^5\right]_{x=1}^{x=2} = \tfrac{3}{5}(32 - 1) = 18\tfrac{3}{5}.$$

---

1) Es werde daran erinnert, daß $\ln x$ den natürlichen Logarithmus von x bedeutet, während der zur Basis 10 gehörige, also der gewöhnliche Logarithmus durch $\log x$ bezeichnet werden soll. Vgl. Teil I, Fußnote zu S. 6.

2) Bei den folgenden Aufgaben wurde die willkürliche Integrationskonstante C, die den ausgerechneten Integralwerten eigentlich hinzuzufügen wäre, der Einfachheit halber meistens weggelassen.

10. Wie groß ist der Flächeninhalt $AMNB$ der Parabel $y = 2x^2$ für das Intervall von $x = 1$ bis $x = 2$ (Fig. 2)?

Fig. 2.

$$F = \int_1^2 2x^2\,dx = \tfrac{2}{3}\left[x^3\right]_1^2 = 4\tfrac{2}{3}\,.$$

Betragen die Längeneinheiten, in denen die Abszissen $x = 1$ und $x = 2$ gegeben sind, Dezimeter, so beträgt der Flächeninhalt $4\frac{2}{3}$ qdm.

11. Die gleiche Aufgabe für die Kurve $y = \frac{1}{4}x^3$ und das Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$.

Man findet $F = 1$.

12. Man bestimme den Flächeninhalt der Kurve $y + 3x^3 - 6x^2 = 0$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$ (Fig. 3).

$$F = 3\int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = 3\left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4.$$

13. Man bestimme die Inhalte F_1 und F_2 der zu den Intervallen von $x = 1$ bis $x = 2$ bzw. von $x = 2$ bis $x = 3$ gehörigen Flächenstücke der Kurve $y = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (Fig. 4).

Fig. 3.

Fig. 4.

Man findet

$$F_1 = \tfrac{1}{4}, \quad F_2 = -\tfrac{1}{4}\,.$$

Warum ist F_2 negativ? Die Summe der *absoluten* Werte der beiden Flächenstücke wird $F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}$. Warum würde es falsch sein, bei direkter Berechnung der Summe F die Integration über $y\,dx$ von $x = 1$ bis $x = 3$ zu erstrecken?

14. Wie groß ist der Inhalt der auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen bezogenen Hyperbel $y = \frac{m^2}{x}$ für das Intervall von x_1 bis x_2, wenn ω der Winkel der beiden Asymptoten und $0 < x_1 < x_2$ ist?

Man findet

$$F = \sin\omega \int_{x_1}^{x_2} \frac{m^2}{x}\, dx = m^2 \sin\omega \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Insbesondere im Falle $x_1 = 1$, $x_2 = X$, $m = 1$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ergibt sich $F = \ln X$.

15. $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß a und b positiv seien.

16. Welche *Wärmemenge* ist nötig, um 10 kg Eisen, das eine Temperatur von 20° C hat, auf 100° zu erwärmen, wenn die *spezifische Wärme* c_t des Eisens bei der zwischen 0° und 200° gelegenen Temperatur t durch die Formel

$$c_t = 0{,}1053 + 0{,}000142\, t$$

gegeben ist? Wie groß ist die zur Erwärmung aufgewandte Arbeit in Kilogrammetern?

Zunächst werde daran erinnert, daß man unter der spezifischen Wärme eines Körpers gewöhnlich die Wärmemenge versteht, die notwendig ist, um bei der Gewichtseinheit des Körpers eine Erwärmung um 1° C hervorzubringen. Wählt man als Gewichtseinheit das Kilogramm, so wird als *Einheit* der Wärmemenge eine *„große Kalorie“* oder Kilogrammkalorie angenommen, d. i. diejenige Wärmemenge, die ein Kilogramm *Wasser* von $14\frac{1}{2}$° auf $15\frac{1}{2}$° erwärmt (vgl. Teil I, S. 34). Wählt man als Gewichtseinheit das Gramm, so legt man als Einheit der Wärmemenge die Grammkalorie zu Grunde, d. i. diejenige Wärmemenge, die ein Gramm Wasser von $14\frac{1}{2}$° auf $15\frac{1}{2}$° erwärmt. In beiden Fällen hat c_t denselben Zahlenwert.

Will man aber die Änderung berücksichtigen, die die spezifische Wärme bei Änderung der Temperatur erfährt, was bei der vorliegenden Aufgabe geschehen soll, so definiert man die spezifische Wärme durch die Formel

$$c_t = \frac{dQ}{dt},$$

wo dQ die Wärmemenge bedeutet, die notwendig ist, um eine Gewichtseinheit des Körpers von der Temperatur t um dt zu erwärmen.

Bei der gestellten Aufgabe ist

$$c_t = \frac{dQ}{dt} = 0{,}1053 + 0{,}000142\,t,$$

für 1 kg wird daher

$$Q = \int_{20}^{100} (0{,}1053 + 0{,}000142\,t)\,dt = \left[0{,}1053\,t + 0{,}000071\,t^2\right]_{t=20}^{t=100} = 9{,}1056,$$

für 10 kg Eisen ist die gesuchte Wärmemenge gleich 91,056 Kilogrammkalorien.

Will man die dieser Erwärmung gleichwertige Arbeit L in Kilogrammetern ausgedrückt wissen, so ist die gefundene Anzahl von Kilogrammkalorien mit 427, dem sogenannten *mechanischen Wärmeäquivalent* zu multiplizieren, denn einer großen Kalorie entspricht ein Arbeitswert von 427 kgm (vgl. Teil I, S. 34 f.).

Im vorliegenden Beispiel findet man $L = 38880{,}9$ kgm.

17. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}.$

18. $\int \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}\,dx = x^{\frac{5}{3}} = x \sqrt[3]{x^2}.$

19. $\int \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x}.$

20. $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} x \sqrt[n]{x^m}.$

21. $\int \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}\,dx = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$

22. $$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + 6 x^{\frac{5}{6}}$$
$$- \frac{14}{3} x^{\frac{3}{2}} + 12 x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(\frac{2}{9} x^4 - \frac{6}{5} x^2 + 6\sqrt[3]{x} - \frac{14}{3} x + 12\right)$$

23. Welchen Flächeninhalt hat das Segment, das von der Parabel $y = -x^2 + 7x - 10$ durch die x-Achse abgeschnitten wird (vgl. Fig. 5)?

Fig. 5.

Die Kurve schneidet die x-Achse an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$; daher wird

$$F = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)\,dx = 4\tfrac{1}{2}\cdot$$

24. Man soll zeigen, daß die Fläche der Parabel $y^2 = px$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = x_1$ gleich $\frac{2}{3} x_1 y_1$ ist, wo y_1 die zur Abszisse x_1 gehörige positive Ordinate $+\sqrt{px_1}$ bedeutet.

$$F = \sqrt{p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \tfrac{2}{3} \sqrt{p}\, x_1^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x_1 \sqrt{p x_1} = \tfrac{2}{3} x_1 y_1.$$

25. Wie groß ist der Inhalt F des den zwei Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ gemeinsamen Flächenstücks (Fig. 6)?

Der Schnittpunkt P der beiden Kurven hat die Koordinaten

$$x = y = 2p;$$

daher wird

$$F = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{4}{3} p^2.$$

Fig. 6.

Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der folgenden:

26. Zwei kongruente Parabeln haben denselben Scheitel, und ihre Achsen bilden miteinander den Winkel α. Wie groß ist der Inhalt F des den beiden Parabeln gemeinsamen Flächenstücks (Fig. 7)?

Ist $y^2 - 2px = 0$ die Gleichung der einen Parabel, so hat die andere eine Gleichung von der Form $Y^2 - 2pX = 0$, wo X und Y die Abkürzungen

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

bedeuten, denn diese beiden Gleichungen sind bekanntlich die Formeln für die Transformation eines rechtwinkligen Koordinatensystems bei Drehung des Systems in positivem Sinn (dem Sinn derjenigen Drehung, die die positive Richtung der x-Achse auf kürzestem Wege in die positive Richtung der y-Achse überführt) um den Winkel α. Bezogen auf das durch die Achsen X und Y gebildete Koordinatensystem hat die zweite Parabel offenbar die Gleichung $Y^2 - 2pX = 0$.

Fig. 7.

Die beiden Kurven schneiden sich im Koordinatenanfang O und in einem Punkte P, der auf einer durch O gehenden, unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ gegen die x-Achse geneigten Geraden liegt, denn die Parabeln und ihre Achsen bilden eine Figur, die die Halbierungslinie des Winkels α der beiden Parabelachsen zur Symmetrielinie hat. Die Koordinaten des Punktes P sind daher von der Form $x_1 = \varrho \cos \frac{1}{2}\alpha$,

$y_1 = \varrho \sin \frac{1}{2}\alpha$, wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, den man leicht gleich

$$2p \cos \tfrac{1}{2}\alpha : \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

findet. Daher hat P die Koordinaten

$$x_1 = 2p \cot^2 \tfrac{1}{2}\alpha, \quad y_1 = 2p \cot \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die Hälfte des gesuchten Inhalts F des den beiden Parabeln gemeinsamen Flächenstücks ist

$$\tfrac{1}{2} F = \int_0^{x_1} \sqrt{2px}\, dx - \triangle OMP,$$

wo $\triangle OMP$ den Inhalt $\frac{1}{2} x_1 y_1$ des Dreiecks OMP bezeichnet.

Unter Rücksicht auf das Ergebnis von Aufgabe 24 ist daher

$$\tfrac{1}{2} F = \tfrac{2}{3} x_1 y_1 - \tfrac{1}{2} x_1 y_1,$$

somit

$$F = \tfrac{1}{3} x_1 y_1 = \tfrac{4}{3} p^2 \cot^3 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

27. Den Inhalt der zu dem Intervall von $x = 0$ bis $x = 8$ gehörigen Fläche der Neilschen Parabel $y^2 = \frac{1}{32} x^3$ zu bestimmen (vgl. Fig. 26 in Teil I, S. 67).

Man findet

$$F = \int_0^8 \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\, x^{\frac{3}{2}}\, dx = \tfrac{1}{20}\sqrt{2}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^8 = 12{,}8.$$

28. Die Gleichung $y^m = kx^n$ stellt, wenn m und n ganze positive Zahlen sind, eine durch den Koordinatenanfang gehende Kurve dar, die man als Parabel höherer Ordnung bezeichnet (je nachdem $m > n$ oder $n > m$ ist, heißt die Parabel von der m^{ten} oder n^{ten} Ordnung). Dabei werde der Einfachheit halber angenommen, daß k eine positive Zahl ist; alsdann liegt ein Teil der Kurve jedenfalls im ersten Quadranten des Koordinatensystems.

Fig. 8.

Ist $P_1(x_1, y_1)$ ein in diesem Quadranten befindlicher Punkt der Kurve und sind $P_1 M_1$ und $P_1 N_1$ die von P_1 auf die Koordinatenachsen gefällten Lote (Fig. 8), so wird das Rechteck $OM_1P_1N_1$ durch den Kurvenbogen OP_1 in zwei Teile zerlegt, und die Inhalte F_1, F_2 dieser an die x-Achse bzw. y-Achse anstoßenden Teile verhalten sich zueinander wie m zu n, es ist $F_1 : F_2 = m : n$. Dies soll bewiesen werden.

Man findet

$$F_1 = k^{\frac{1}{m}} \int_0^{x_1} x^{\frac{n}{m}}\, dx = \frac{m}{m+n} x_1 y_1, \quad \text{usw.}$$

Es werde noch bemerkt, daß die Kurve im ersten Quadranten der positiven Richtung der y-Achse die konkave oder konvexe Seite zukehrt, je nachdem $n > m$ oder $n < m$ ist. Vgl. Teil I, S. 96.

29. Man soll den Inhalt der Parabel $y = ax^2 + 2bx + c$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 2h$ bestimmen und in das Ergebnis an Stelle der drei Koeffizienten a, b, c die zu den Abszissen 0, h, $2h$ gehörigen Ordinaten y_0, y_1, y_2 einführen.

$$F = \int_0^{2h} (ax^2 + 2bx + c)\,dx = \tfrac{8}{3}ah^3 + 4bh^2 + 2ch.$$

Nun ist

$$y_0 = c, \quad y_1 = ah^2 + 2bh + c, \quad y_2 = 4ah^2 + 4bh + c,$$

daher

$$c = y_0, \quad 2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2, \quad 4bh = -3y_0 + 4y_1 - y_2$$

und

$$F = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Offenbar ist diese Formel von der Lage der y-Achse völlig unabhängig, so daß sie auch für den Inhalt eines Flächenstücks der Parabel $y = ax^2 + 2bx + c$ gilt, das zu dem Intervall von $x = x_0$ bis $x = x_0 + 2h$ gehört, wenn y_0, y_1, y_2 die den Abszissen $x = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ entsprechenden Ordinaten bezeichnen.

Der für F abgeleitete Ausdruck bildet eine Grundlage für die *näherungsweise* Bestimmung des Inhalts einer Fläche, die durch einen *beliebigen* Kurvenbogen P_0P, die Ordinaten y_0 und y seiner Endpunkte und das zugehörige Stück M_0M der Abszissenachse (Fig. 9) begrenzt ist; dabei muß die Kurve keineswegs durch ihre Gleichung gegeben sein, es genügt, wenn sie gezeichnet vorliegt. Um einen angenäherten Ausdruck für den Inhalt der Fläche $P_0M_0MPP_0$ zu erhalten, teilt man die Strecke M_0M in $2n$, also in eine gerade Anzahl gleicher Teile; jeder derselben habe die Länge h. Durch Ordinaten, die man in den Teilpunkten errichtet, wird alsdann die ganze Fläche in $2n$ Streifen oder in n Doppelstreifen zerlegt, und diese Doppelstreifen sind oben durch die Kurvenbogen P_0P_2, P_2P_4, $\ldots$ $P_{2n-2}P$ begrenzt (Fig. 9).

Fig. 9.

Würden diese Bogen mehreren *Parabeln* angehören, deren jede eine Gleichung von der Form $y = ax^2 + 2bx + c$ hat, so würden die Inhalte der Doppelstreifen völlig genau der Reihe nach durch

$$\tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2), \quad \tfrac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4), \cdots \tfrac{1}{3}h(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ausgedrückt, wobei die Ordinate y des Punktes P durch y_{2n} ersetzt worden ist.

Gehören die Bogen $P_0 P_2, P_2 P_4, \ldots P_{2n-2} P$ irgend welchen anderen Kurven an, so stellen die eben angeführten Ausdrücke die Inhalte der Doppelstreifen nur *angenähert* dar.

Durch Addition der angegebenen Ausdrücke findet man folgende *Näherungsformel*:

$$F = \frac{h}{3}\{y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})\},$$

die nach dem Engländer Thomas Simpson, der sie im Jahre 1743 veröffentlichte,[1] als *Simpsonsche Regel* bezeichnet wird.

Liegt die Kurve $P_0 P$ *gezeichnet* vor, so sind die Ordinaten y_0, $y_1, \ldots y_{2n}$ mit einem Maßstab zu messen. Ist die Kurve durch ihre *Gleichung* $y = f(x)$ gegeben, so muß man die zu den Abszissen

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h, \ldots, x_{2n-1} = x_0 + (2n-1)h,\ \ x_{2n} = x_0 + 2nh$$

gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}$ berechnen. Nach dem letzten Verfahren kann man überhaupt, ganz abgesehen von seiner geometrischen oder irgend einer anderen Bedeutung, angenähert den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ finden. Ein Beispiel hierzu wird in § 6, Aufg. 37, S. 81 gegeben.

Es werde bei dieser Gelegenheit noch auf eine andere Formel hingewiesen, die zur näherungsweisen Berechnung eines Integrals oder zur Bestimmung eines Flächeninhalts dienen kann.

Fig. 10.

Der Anfangspunkt P_0 des Kurvenbogens $P_0 P_n$ habe die Abszisse x_0, der Endpunkt P_n die Abszisse x_n. Teilt man nun das zu $P_0 P_n$ gehörige Stück $M_0 M_n$ der Abszissenachse in n gleiche Teile von der Länge

$$h = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$$

und errichtet man in den Teilpunkten die Ordinaten $M_1 P_1$, $M_2 P_2, \ldots$, so wird die Fläche $P_0 M_0 M_n P_n P_0$ in n Streifen zerlegt (Fig. 10). Man kann nun angenähert den Inhalt dieser Fläche ersetzen durch die Summe der Inhalte der Trapeze

$$P_0 M_0 M_1 P_1,\ \ P_1 M_1 M_2 P_2, \ldots,$$

die entstehen, wenn man die Kurvenpunkte $P_0, P_1, P_2, \ldots$ durch Sehnen

[1]) Der Gedanke, der der Simpsonschen Regel zugrunde liegt, findet sich übrigens schon im Jahre 1668 bei J. Gregory. Vgl. G. Heinrich in der Zeitschrift Bibliotheca mathematica (3) 1 (1900), S. 90—92.

verbindet. Hat irgend ein Teilpunkt M_k die Ordinate y_k, so kann daher der Inhalt der Fläche $P_0 M_0 M_n P_n P_0$ oder das Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx,$$

wo $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve $P_0 P_n$ bedeutet, *angenähert* durch die Formel

$$F = \frac{h}{2}\{y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n\}$$

$$= \frac{x_n - x_0}{2n}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\}$$

dargestellt werden, die man als *Trapezformel* bezeichnet. So lange die Kurve nach oben konvex ist, gibt diese Formel einen zu kleinen Wert für den Inhalt der entsprechenden Fläche, so lange die Kurve nach oben konkav ist einen zu großen Wert.

30. Die Simpsonsche Regel wird z. B. beim Bau eines Schiffes benutzt, um die Inhalte der vertikalen Querprofile, der in gleichen wagrechten Abständen *rechtwinklig* zur Schwimmebene (Konstruktions-Wasserlinie) und rechtwinklig zum Kiel gelegten Schnittebenen oder *Spanten* zu berechnen, oder auch zur Berechnung der in gleichen senkrechten Abständen *parallel* zur Ebene der Konstruktions-Wasserlinie gelegten horizontalen Schnitte oder Wasserlinien, falls man nicht vorzieht, diese Bestimmungen bei den in verkleinertem Maßstabe vorliegenden Zeichnungen der Schnitte mit Hilfe eines Planimeters auszuführen.

Diese Ergebnisse kann man nun als Ordinaten y von Kurven auffassen und wieder mit Hilfe der Simpsonschen Regel das Volumen der verdrängten Wassermasse, die *Wasserverdrängung* (das Deplacement) berechnen, indem entweder die Inhalte der Spantflächen oder (zur Kontrolle) die Inhalte der Wasserlinienflächen benutzt werden.

Man berechne z. B. den *Hauptspant* (d. i. den an der Stelle der größten Breite des Schiffes befindlichen Spant) bei einem kleinen *Schraubendampfer*, wenn die halbe Breite $A_0 B_0$ des Hauptspantes in der Konstruktions-Wasserlinie 2,46 m beträgt (Fig. 11). In der Tiefe $w = 0{,}393$ m unter dieser Wasserlinie sei die halbe Breite $A_1 B_1 = 2{,}35$ m; es gehören ferner zusammen die Werte $2w$ und $A_2 B_2 = 2{,}04$ m, $3w$ und $A_3 B_3 = 1{,}41$ m, $4w$ und $A_4 B_4 = 0{,}60$ m. Hier sind die Längen $A_i B_i$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ die bei der Simpsonschen Regel in Aufg. 29 mit y_i bezeichneten Größen. Die unten am Kiel übrig bleibende Fläche $A_4 B_4 K$ soll als rechtwink-

Fig. 11.

liges Dreieck betrachtet und für sich berechnet werden; die Katheten haben die Länge 0,60 m und 0,39 m.

Die Figur stellt die rechte Hälfte des Hauptspantes dar; man erhält mit Hilfe der Simpsonschen Regel für ihren Inhalt:

$$\frac{1}{2} S = \frac{0,393}{3} \{2,46 + 0,60 + 4(2,35 + 1,41) + 2 \cdot 2,04\} + \frac{0,39 \cdot 0,6}{2}$$
$$= 2,906 + 0,117 = 3,023.$$

Die ganze Fläche hat hiernach einen Inhalt $S = 6,046$ qm; die Tiefe A_0K beträgt 1,962 m.

31. Die Wasserverdrängung V des Schraubendampfers in Aufg. 30 zu berechnen, wenn 15 Spantenflächen ausgerechnet wurden, deren jede von der benachbarten einen Abstand $h = 1,5$ m hat. Mit z_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, 14$) werde der *halbe* Inhalt einer solchen Spantenfläche bezeichnet In Fig. 12 sind die Beträge z_i durch Ordinaten dargestellt; die erste Spante habe vom nächstgelegenen Ende M des Schiffes den Abstand $MF_0 = 1,37$ m, die letzte Spante habe vom nächsten Ende N den Abstand $F_{14}N = 1,48$ m. Die halbe Wasserverdrängung $\frac{1}{2} V$ soll mit Hilfe der Simpsonschen Regel bestimmt werden, die nun in der Form

Fig. 12.

$$(1) \quad \frac{2h}{3} \left\{ \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{2} z_{14} + 2(z_1 + z_3 + \cdots + z_{13}) + (z_2 + z_4 + \cdots + z_{12}) \right\}$$

geschrieben werden möge. Zu diesem Ausdruck hat man den vor der ersten und hinter der letzten Spante gelegenen Raumteil hinzuzufügen, der angenähert als halbes Rechtflach betrachtet werden kann.

z_0	0,50	$\frac{1}{2}$	0,25
z_1	1,20	2	2,40
z_2	1,87	1	1,87
z_3	2,42	2	4,84
z_4	2,76	1	2,76
z_5	2,97	2	5,94
z_6	3,01	1	3,01
z_7	2,97	2	5,94
z_8	2,81	1	2,81
z_9	2,53	2	5,06
z_{10}	2,19	1	2,19
z_{11}	1,74	2	3,48
z_{12}	1,26	1	1,26
z_{13}	0,77	2	1,54
z_{14}	0,31	$\frac{1}{2}$	0,15
			43,50

Die zweite Spalte der vorstehenden Tafel enthält die Werte z_i in Quadratmetern, die dann folgende Spalte die Faktoren $\frac{1}{2}$ oder 2

oder 1 entsprechend dem Ausdruck (1); die vierte Spalte enthält die Produkte dieser Faktoren und der zugehörigen Werte z_i[1]).

Für den Ausdruck (1) findet man $\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 \cdot 43{,}50 = 43{,}50$ cbm; die beiden anderen oben erwähnten Raumteile haben das Volumen

$$\frac{1{,}37 \cdot 0{,}50}{2} = 0{,}34 \text{ cbm} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1{,}48 \cdot 0{,}31}{2} = 0{,}23 \text{ cbm}.$$

So ergibt sich $\frac{1}{2} V = 43{,}50 + 0{,}34 + 0{,}23 = 44{,}07$ cbm und $V = 88$ cbm. Die Länge des Schraubendampfers beträgt

$$14 \cdot 1{,}5 + 1{,}37 + 1{,}48 = 23{,}85 \text{ m}.$$

32. Ein materieller Punkt von der Masse m befindet sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle O im Abstand a von der Oberfläche der ruhend gedachten Erde und hat die nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtete Geschwindigkeit v_0. In welchem Abstand s von O befindet sich der Punkt zur Zeit t und wie groß ist alsdann seine Geschwindigkeit v, wenn g die dem Punkt durch die Anziehungskraft der Erde erteilte Beschleunigung der Schwere ist? Die Änderung, die diese Beschleunigung bei Änderung des Abstandes vom Mittelpunkt der Erde erfährt, soll vernachlässigt werden, auch werde angenommen, daß die Bewegung im luftleeren Raume erfolgt.[2]) Vgl. Aufg. 13, S. 51 und Aufg. 1, S. 142 ff.

Wie in den Anfangsgründen der Mechanik gezeigt wird, ist die Beschleunigung gleich der zweiten Ableitung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ der gesuchten Funktion $s = f(t)$, die die Abhängigkeit der von dem Punkt durchlaufenen Wegstrecke s von der Zeit t darstellt. Die Geschwindigkeit v ist gleich der ersten Ableitung $\frac{ds}{dt}$ (vgl. Teil I, S. 17); sie hat die Richtung der senkrecht nach unten wirkenden Beschleunigung der Schwere und ist positiv, da dieser Richtung der *positive* Sinn beigelegt werden soll.

Das Produkt aus der Masse m des materiellen Punktes P und der ihr erteilten Beschleunigung ist nun nach einem Grundgesetz der Dynamik gleich der auf P wirkenden Kraft, die im vorliegenden Fall die Schwere mg ist. Man hat somit

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg$$

1) Die in Aufg. 30 und 31 vorkommenden Zahlenwerte stammen aus einer Vorlesung über Schiffsbau von Herrn Professor W. Riehn in Hannover; ich verdanke sie meinem verehrten Kollegen Herrn Professor Dr. ing. E. Heidebroek.

2) Die Beschleunigung g der Schwere, d. h. der Zuwachs, den die Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume in der Nähe der Erdoberfläche fallenden Körpers in der Sekunde erfährt, beträgt am Äquator 978 cm/sek^2, in mittleren geographischen Breiten, z. B. in der Breite von Berlin, 981 cm/sek^2, an den beiden Polen 983 cm/sek^2.

und

$$v = \frac{ds}{dt} = \int g\,dt = gt + c_1,$$

wo c_1 eine Konstante bedeutet, die sich bestimmen läßt, wenn man beachtet, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v gleich v_0 sein soll.

Daher wird $c_1 = v_0$ und

$$\frac{ds}{dt} = v = gt + v_0. \tag{1}$$

Eine zweite Integration liefert

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + c_2,$$

wo die Konstante c_2 sich bestimmen läßt, wenn man beachtet, daß zur Zeit $t = 0$ auch $s = 0$ ist. So findet man $c_2 = 0$ und

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt noch:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}, \quad v = +\sqrt{2gs + v_0^2}. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) stellen die *Gesetze des freien Falls* dar. Wäre die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit $t = 0$ vertikal nach oben gerichtet gewesen, so hätte man in den vorstehenden Formeln v_0 durch $-v_0$ zu ersetzen. Der Punkt P würde alsdann zunächst *steigen* während einer Zeit t, die aus $0 = gt - v_0$ folgt, also gleich $v_0 : g$ ist; für die von ihm hierbei zurückgelegte Weglänge erhält man $s = -v_0^2 : 2g$, und zwar ist diese negativ, da der senkrecht nach unten erfolgenden Bewegung der positive Sinn beigelegt wurde. Nach Verlauf der Zeit $t = v_0 : g$ beginnt der materielle Punkt zu fallen. Wie man sieht, ist die Bewegung des Punktes von m unabhängig, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß im luftleeren Raum alle Körper gleich schnell fallen, welche Masse sie auch haben mögen.[1])

---

1) Schon G. B. Benedetti (1530—1590) kannte die Beschleunigung beim freien Fall und behauptete, daß Körper desselben Stoffes, aber von verschiedener Größe, mit gleicher Geschwindigkeit fallen. Jedoch glaubte er, daß die Fallgeschwindigkeit gleich großer und gleich gestalteter Körper dem Gewicht dieser Körper proportional sei. Etwa im Jahre 1590 fand G. Galilei (1564—1642), der als Begründer der Dynamik angesehen werden kann, daß alle Körper gleich schnell fallen müßten, wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre. Zur experimentellen Bestätigung dieses Satzes ließ er Steine von dem schiefen Turme in Pisa herabfallen. Diese erreichten nahezu gleichzeitig den Erdboden, einerlei ob sie einzeln fielen oder ob mehrere Steine zusammengebunden fielen. Vgl. hierzu E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt, 6. Aufl., Leipzig 1908, S. 125—149 und S. 270—276; F. Rosenberger, Die Geschichte der Physik, 2. Teil, Braunschweig 1884, S. 16—26; G. Galilei, De motu, abge-

33. Ein im luftleeren Raum befindlicher materieller Punkt P von der Masse m wird zur Zeit $t = 0$ von der Stelle O (dem Koordinatenanfang) aus mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 weggeschleudert, deren Richtung gegen die Horizontalebene unter dem Winkel α (Elevationswinkel) geneigt ist. Man soll zeigen, daß unter Einwirkung der Schwere der Punkt P zur Zeit t die Koordinaten hat

$$x = tv_0 \cos\alpha\,, \qquad y = tv_0 \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Hierbei ist die x-Achse die wagrechte Gerade, die man in der durch die Richtung α der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten, durch O gehenden Vertikalebene ziehen kann; die positive Richtung der y-Achse erstrecke sich senkrecht nach oben, der Winkel α werde von der positiven Richtung der x-Achse aus gerechnet.

Es wird sich zeigen, daß die Bahnkurve des Punktes in der soeben näher bestimmten Vertikalebene (xy-Ebene) liegt; da dies aber noch nicht bewiesen ist, werde zunächst durch O rechtwinklig zur x-Achse eine wagrechte z-Achse gelegt.

Nach einem Grundgesetz der Mechanik bestehen die Gleichungen

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wenn auf einen frei im Raum beweglichen Punkt von der Masse m Kräfte wirken, deren Resultante (Mittelkraft) die den Koordinatenachsen parallelen Komponenten (Seitenkräfte) X, Y, Z hat. Im vorliegenden Falle wirkt auf den Punkt P, sobald er aus dem Koordinatenanfang weggeschleudert ist, nur die Schwerkraft mg, und zwar in der negativen Richtung der y-Achse. Man hat somit

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

durch Integration erhält man die den Koordinatenachsen parallelen Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t, nämlich

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = c_1\,, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + c_2\,, \quad \frac{dz}{dt} = c_3.$$

Die Konstanten c_1, c_2, c_3 lassen sich bestimmen, indem man die Glei-

---

druckt in Le Opere die Galileo Galilei, Edizione nazionale (direttore A. Favaro) Bd. 1, Florenz 1890, S. 243ff.; vgl. ferner für die Fallgesetze G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali, Leiden 1638, abgedruckt in den eben erwähnten Opere di G. Galilei, Bd. 8, Florenz 1898, S. 190ff., ins Deutsche übersetzt von A. von Oettingen, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 24, Leipzig 1891, insbesondere S. 9—26. Vgl. ferner H. E. Timerding, Die Fallgesetze, Leipzig und Berlin 1912.

chungen (3) für den Anfangszustand der Bewegung ($t = 0$) hinschreibt; alsdann folgt

$$(4) \qquad v_0 \cos\alpha = c_1, \quad v_0 \sin\alpha = c_2, \quad 0 = c_3.$$

Die Integration der Gleichungen (3) ergibt mit Rücksicht auf (4):

$$(5) \qquad x = v_0 t \cos\alpha + d_1, \quad y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + d_2, \quad z = d_3,$$

und hier findet man für jede der drei Integrationskonstanten d_1, d_2, d_3 den Betrag Null, wenn man beachtet, daß der Punkt P zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten $x = y = z = 0$ hatte. Der Punkt P befindet sich also zur Zeit t an der Stelle (vgl. Teil I, S. 180):

$$(6) \qquad x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2, \quad z = 0.$$

Die Komponenten seiner Geschwindigkeit sind nach (3) und (4) oder nach (6):

$$(7) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

die Geschwindigkeit selbst wird:

$$(8) \qquad v = +\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = +\sqrt{v_0^2 - 2 g v_0 t \sin\alpha + g^2 t^2}.$$

Wie man aus (6) ersieht, verläuft die Bewegung des Punktes in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Vertikalebene (xy-Ebene). Die Bahnkurve ist von der Masse m des Punktes unabhängig, sie hängt nur ab von der Größe und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit sowie von der Beschleunigung der Schwere. Durch die Gleichungen (6) sind die Koordinaten eines Punktes der Bahnkurve als Funktionen des Parameters t dargestellt. Ausdrücklich sei noch einmal hervorgehoben, daß der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt wurde; auch wurde angenommen, daß die Beschleunigung der Schwere konstant ist und längs der ganzen Bahnkurve in derselben Richtung wirkt, Annahmen, die nur innerhalb eines beschränkten Raumes gemacht werden können.

Durch Elimination von t aus den Gleichungen (6) erhält man die Gleichung der Bahnkurve in der Gestalt

$$(9) \quad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \quad \text{oder} \quad g x^2 - v_0^2 x \sin 2\alpha + 2 v_0^2 y \cos^2\alpha = 0.$$

Eine nähere Untersuchung ergibt für die Bahn eine *Parabel*[1]) mit

1) Daß der materielle Punkt, wenn kein Widerstand vorhanden ist, eine Parabel beschreibt, fand G. Galilei; vgl. dessen schon S. 15 erwähntes Werk Discorsi e dimostrazioni matematiche, abgedruckt in den Opere di G. Galilei, Bd. 8, Florenz 1898, S. 268ff., Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 24, Leipzig 1891, S. 80ff.

vertikaler Achse (Fig. 13). Die Kurve schneidet die x-Achse, vom Koordinatenanfang abgesehen, an der Stelle $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, und dieser Ausdruck stellt daher die *Wurfweite* dar. Diese wird offenbar gleich groß für die zwei Elevationswinkel α und $90^0 - \alpha$ und erreicht für $\alpha = 45^0$ ihren größten Wert.

Bei Bestimmung des *Scheitels* der Parabel, der höchsten Stelle der Bahnkurve, ist zu beachten, daß für ihn die vertikale Komponente der Geschwindigkeit verschwindet. Da dies nach (7) für $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ eintritt, erhält man für den Scheitel der Parabel die Koordinaten

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \qquad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{10}$$

Seine Höhe über der x-Achse erreicht ihren größten Betrag für $\alpha = 90^0$, also beim vertikalen Wurf, für den die Parabel natürlich in die doppelt zu zählende y-Achse ausartet. Offenbar ist die größte, für $\alpha = 45^0$ erreichbare Wurfweite doppelt so groß wie die größte, für $\alpha = 90^0$ erreichbare Höhe.

Die *Hüllkurve* der bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu verschiedenen Elevationswinkeln α gehörigen Wurfparabeln wurde schon in Teil I, S. 180 bestimmt (vgl. Fig. 13). Auch wurde dort schon erwähnt, daß

Fig. 13.

alle diese Wurfparabeln eine gemeinsame *Leitlinie* haben, während ihre *Brennpunkte* auf einem Kreis liegen, der den Ausgangspunkt O der Bewegung zum Mittelpunkt hat und die gemeinsame Leitlinie berührt. Dies ergibt sich leicht, wenn man die Gleichung (9) in der Form

$$(x - x_1)^2 + \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g}(y - y_1) = 0 \tag{11}$$

schreibt, wo x_1 und y_1 die in (10) angegebenen Koordinaten des Scheitels bedeuten. Die gemeinsame Leitlinie verläuft, wie gleichfalls aus (11) leicht ersichtlich ist, im Abstand $v_0^2 : 2g$ parallel zur x-Achse, sie liegt also in derjenigen Höhe, bis zu der sich der senkrecht in die Höhe geschleuderte materielle Punkt erhebt.

Die *Scheitel* der zu gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0, aber zu verschiedenen Elevationswinkeln α gehörigen, in einer und derselben Ebene befindlichen Wurfparabeln liegen auf einer Ellipse, die das von O auf die gemeinsame Leitlinie gefällte Lot zur kleinen Achse, eine doppelt so lange Strecke zur großen Achse hat. Jeder außerhalb dieser Ellipse gelegene Punkt Q kann nur von dem absteigenden Ast der zwei durch Q gehenden Wurfparabeln getroffen werden (vgl. Teil I, S. 180 f.).

Bei Berücksichtigung aller Parabeln, die zu gleich großen, aber sich von O aus nach beliebigen Richtungen des *Raumes* erstreckenden Geschwindigkeiten v_0 gehören, erhält man als Ort der Brennpunkte statt des früheren Kreises eine Kugel, als Ort der Leitlinien eine wagrechte Ebene, die Scheitel der Parabeln erfüllen ein Rotationsellipsoid.

34. Nach einem Satze der Hydrostatik ist der *Druck* dp, den die in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeit auf ein Flächenteilchen dF der Seitenwand des Gefäßes ausübt, gleich dem Produkt aus dem Gewicht γ der Volumeinheit der Flüssigkeit, dem Flächeninhalt dF und der Tiefe x, in der das Teilchen dF unter dem Wasserspiegel gelegen ist. Gleiches gilt, wenn dF nicht der Seitenwand des Gefäßes angehört, sondern sich auf einer in das Gefäß getauchten Fläche befindet.

Es wird nun eine ebene rechteckige Fläche vertikal in das Gefäß getaucht, das mit irgend einer Flüssigkeit gefüllt sei. Die eine Seitenlinie des Rechtecks liege im Wasserspiegel und habe die Länge $a = 3$ dm, die beiden vertikalen Seiten haben die Länge $b = 5$ dm. Wie groß ist der auf jede Seitenfläche des Rechtecks ausgeübte Druck p?

Zwei in der Tiefe x und $x + dx$ auf der Fläche des Rechtecks gezogene wagrechte Geraden begrenzen einen Streifen vom Inhalt $dF = 3\,dx$; daher ist $dp = 3\gamma x\,dx$ und

$$p = 3\gamma \int_0^5 x\,dx = 37{,}5\gamma.$$

Die benutzten Längeneinheiten sind Dezimeter, somit $p = 37{,}5\gamma$ kg, wenn ein Kubikdezimeter der Flüssigkeit γ Kilogramm wiegt.

35. Unter denselben Voraussetzungen wie bei der vorhergehenden Aufgabe wird gefragt, in welcher Tiefe $x = \xi$ eine wagrechte Gerade zu ziehen ist, die das Rechteck derart in zwei Teile teilen soll, daß der auf den oberen Teil ausgeübte Druck so groß ist wie der auf den unteren Teil ausgeübte Druck.

Offenbar muß die Gleichung bestehen

$$3\gamma \int_0^\xi x\,dx = 3\gamma \int_\xi^5 x\,dx \quad \text{oder} \quad \xi^2 = 25 - \xi^2,$$

woraus $\xi = 3{,}535$ dm hervorgeht.

36. In welchen Tiefen sind wagrechte Geraden zu ziehen, die das Rechteck in Aufg. 34 derart in n Streifen teilen, daß die auf die einzelnen Streifen ausgeübten Drucke einander gleich sind? Die wagrechten Seiten des Rechtecks haben die Länge a, die beiden anderen Seiten die Länge b.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots x_{n-1}$ von oben nach unten gerechnet die Tiefen, in denen die Geraden der gewünschten Beschaffenheit liegen, $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \cdots = p_{n-1} = p_n$ seien die auf die einzelnen Streifen ausgeübten gleich großen Drucke. Alsdann ist $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots + p_{n-1} + p_n$ der Gesamtdruck, mit dem die Flüssigkeit auf jede Seitenfläche des Rechtecks wirkt; daher wird $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \frac{k}{n} p$, und wenn man die den beiden Seiten dieser Gleichung zugehörigen Integrale anschreibt, folgt

$$\gamma \left\{ \int_0^{x_1} a\,x\,d\,x + \int_{x_1}^{x_2} a\,x\,d\,x + \cdots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} a\,x\,d\,x \right\} = \frac{k\gamma}{n} \int_0^b a\,x\,d\,x$$

oder (nach Regel **5**, S. 2)

$$\gamma \int_0^{x_k} a\,x\,d\,x = \frac{k\gamma}{n} \int_0^b a\,x\,d\,x, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} x_k^2 = \frac{k b^2}{2n}$$

und

$$x_k : b = \sqrt{k} : \sqrt{n}.$$

So folgt

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_k : \ldots x_{n-1} : b = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \ldots : \sqrt{k} : \ldots \sqrt{n-1} : \sqrt{n}.$$

Zur Konstruktion der Tiefen $x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots x_{n-1}$ teile man die Seite $b = AB$ des Rechtecks in n gleiche Teile (Fig. 14 gilt für $n = 6$): $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}B$, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis und ziehe durch die Teilpunkte $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ rechtwinklig zu AB Geraden, die die Kreisperipherie in $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ treffen. Alsdann ist

$$A X_k^2 = AB \cdot AA_k = b \cdot \frac{kb}{n}$$

und

$$A X_k = b \sqrt{\frac{k}{n}} = x_k.$$

Fig. 14.

37. Den Druck zu bestimmen, den die Flüssigkeit auf die Fläche des eingetauchten Rechtecks ausübt, wenn diese gegen den Flüssigkeitsspiegel unter dem Winkel α geneigt ist und der obere Rand des Rechtecks sich in wagrechter Lage in der Tiefe c unterhalb des Spiegels befindet.

Begrenzt man in der Ebene des Rechtecks einen Streifen, indem man in den Abständen x und $x + dx$ von der Seite AB (Fig. 15) Parallelen zu dieser Seite zieht, so stellt $\gamma a(c + x \sin \alpha)dx$ den auf diesen Streifen ausgeübten Druck dp dar. Man erhält somit

Fig. 15.

$$p = \gamma a \int_0^b (c + x \sin \alpha)\, dx = \frac{ab\gamma}{2}(2c + b \sin \alpha).$$

38. Ein dünnes vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil, das außerdem homogen ist und konstanten Querschnitt hat, (oder ein Faden von gleicher Beschaffenheit) wird an seinen beiden Enden aufgehängt. Welche *Gleichgewichtslage* nimmt das Seil ein, wenn auf jede Stelle desselben senkrecht nach unten eine Kraft oder eine Belastung einwirkt, die sich über die Projektion der Seilkurve auf eine wagrechte Gerade gleichmäßig verteilen würde?

Ist diese wagrechte Gerade die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so soll demnach die auf ein Bogenelement ds der Seilkurve senkrecht nach unten wirkende Kraft oder Belastung der Projektion dx des Bogenelements auf die x-Achse proportional sein. Dabei werde angenommen, daß die Enden des Seiles in der vertikalen xy-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems liegen, bei dem sich die positive Richtung der y-Achse vertikal nach oben erstreckt.

Es möge zuerst der *allgemeinere* Fall betrachtet werden, daß die senkrecht nach unten wirkende Belastung des zum Punkt P der Kurve gehörigen Bogenelements ds gleich $\varphi(x)dx$ ist, wo $\varphi(x)$ eine stetige Funktion der Abszisse x des Punktes P bedeutet. Würde das unter Wirkung dieser Belastung befindliche Seil an irgend einer Stelle P durchschnitten, so könnte nur mit Hilfe von zwei gleichen entgegengesetzt gerichteten Kräften, deren jede die zu P gehörige *Spannung* darstellt, das Gleichgewicht wieder hergestellt werden. Die in P vorhandene Spannung S ist jedenfalls eine Funktion der Koordinaten von P und hat die Richtung der in P gezogenen Tangente. Im benachbarten Punkte P_1 ist die Spannung $S + dS$. Auf das Bogenelement $PP_1 = ds$ (Fig. 16) wirken daher im Falle des Gleichgewichts folgende Kräfte: in P die Spannung S in Richtung der Tangente von P nach unten, in P_1 die Spannung $S + dS$ in Richtung der Tangente von P_1 nach oben, im Schwerpunkt des Bogenelements die Belastung $\varphi(x)dx$ senkrecht nach unten.

Fig. 16.

Bildet die in P gezogene Tangente PT mit den Achsen des räumlichen Koordinatensystems (dessen z-Achse wagrecht liegt) die Winkel α, β, γ, so hat S in Richtung der Koordinatenachsen die Komponenten $-S\cos\alpha$, $-S\cos\beta$, $-S\cos\gamma$; die Spannung $S+dS$ hat die Komponenten

$$S\cos\alpha + d(S\cos\alpha), \quad S\cos\beta + d(S\cos\beta), \quad S\cos\gamma + d(S\cos\gamma),$$

daher kommen im ganzen folgende Komponenten in Betracht:

$$(1) \qquad \begin{cases} X = -S\cos\alpha + S\cos\alpha + d(S\cos\alpha) \\ Y = -S\cos\beta + S\cos\beta + d(S\cos\beta) - \varphi(x)dx \\ Z = -S\cos\gamma + S\cos\gamma + d(S\cos\gamma). \end{cases}$$

Da Gleichgewicht vorhanden ist, müssen die Komponenten verschwinden, man hat also

$$(2) \quad d(S\cos\alpha) = 0, \quad d(S\cos\beta) - \varphi(x)dx = 0, \quad d(S\cos\gamma) = 0.$$

Die erste dieser drei Gleichungen ergibt $S\cos\alpha = c_1$, die dritte $S\cos\gamma = c_3$, wo c_1 und c_3 Integrationskonstanten bedeuten; daher ist $c_3\cos\alpha = c_1\cos\gamma$, und wenn man beachtet, daß $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$ ist, folgt durch Integration $c_3 x = c_1 z + c$, d. h. die Punkte der Kurve liegen in einer zur y-Achse parallelen Ebene. Diese muß aber mit der xy-Ebene selbst zusammenfallen, da die Endpunkte des Seiles schon in dieser Ebene liegen. Alsdann liegen auch alle Tangenten der Seilkurve in der xy-Ebene oder γ ist gleich 90^0, $\cos\gamma = 0$, somit $\cos\beta = \sin\alpha$.

Die Gleichungen (2) können nunmehr durch

$$(3) \qquad S\cos\alpha = c_1, \quad d(S\sin\alpha) - \varphi(x)dx = 0$$

ersetzt werden, von denen die erste aussagt, daß die wagrechte Komponente der Spannung in allen Kurvenpunkten gleich groß ist. Ferner ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, daher

$$(4) \qquad S\sin\alpha = S\cos\alpha\,\frac{dy}{dx} = c_1\,\frac{dy}{dx}.$$

Die Konstante c_1 ist offenbar die Spannung H in demjenigen Kurvenpunkt, dessen Tangente wagrecht verläuft, denn für $\alpha = 0$ ergibt die erste Gleichung (3) $S = c_1$. Allgemein ist also

$$(5) \qquad S\cos\alpha = H \quad \text{oder} \quad S = H : \cos\alpha.$$

Die zweite Gleichung (3) kann nunmehr wegen (4) durch

$$(6) \qquad H\,\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$$

ersetzt werden. Durch zwei Integrationen und Bestimmung der hierbei auftretenden Integrationskonstanten erhält man die gesuchte Gleichung der Seilkurve.

Umgekehrt kann (6) dazu dienen, die Art der Belastung $\varphi(x)dx$ zu bestimmen, die vorhanden sein muß, damit die Seilkurve eine der Gleichung $y = f(x)$ entsprechende Gestalt habe.[1])

Bei der oben gestellten Aufgabe soll die Belastung des Bogenelements ds seiner Projektion dx auf die x-Achse proportional sein; an Stelle von $\varphi(x)dx$ tritt also nunmehr $q\,dx$, wo q eine Konstante ist, nämlich die Belastung einer Seillänge, deren Projektion auf die x-Achse gleich der Längeneinheit ist. An Stelle von (6) tritt nunmehr

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = q, \tag{7}$$

woraus

$$H\frac{dy}{dx} = qx + \gamma_1, \quad Hy = \frac{qx^2}{2} + \gamma_1 x + \gamma_2 \tag{8}$$

hervorgeht. Als Seilkurve erhält man nunmehr eine *Parabel*, deren Achse zur y-Achse parallel ist. Verlegt man die y-Achse parallel zu sich selbst, bis sie durch denjenigen Punkt der Kurve geht, dessen Tangente wagrecht ist (Scheitel der Parabel), so gehören die Werte $x = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ zusammen, es ist alsdann $\gamma_1 = 0$, und wenn man die x-Achse parallel zu sich selbst verschiebt, bis sie durch den Scheitel der Kurve geht, also Scheiteltangente wird, ist auch noch $\gamma_2 = 0$, und als Gleichung der Seilkurve ergibt sich

$$y = \frac{q}{2H}x^2. \tag{9}$$

Hat die Verbindungslinie der Endpunkte A, B des Seiles die Länge $2a$ und ist sie zur x-Achse parallel, bedeutet ferner f die Pfeilhöhe, d. h. den Abstand der Sehne AB vom Scheitel, so ist

$$f = \frac{qa^2}{2H};$$

für die *wagrechte Komponente der Spannung* eines jeden Kurvenpunktes folgt daher

$$H = \frac{a^2q}{2f}, \tag{10}$$

und die Spannung S eines beliebigen Punktes $P(x, y)$ wird alsdann

$$S = H : \cos\alpha = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{H^2 + q^2x^2}$$

1) Vgl. L. Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886, S. 63; Hj. Tallqvist, Lehrbuch der technischen Mechanik, Bd. 1, Helsingfors 1903, S. 407 bis 411. Eine rein geometrische Ableitung der Gleichung (7) gibt O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906, S. 64f.

oder

(11) $$S = \frac{q}{2f}\sqrt{a^4 + 4f^2x^2}.$$

Die vertikale Komponente V der Spannung erhält man aus

$$H^2 + V^2 = S^2;$$

sie wird

(12) $$V = qx.$$

Hat z. B. die *Kette einer Hängebrücke* (Fig. 17) die Spannweite $2a = 60$ m und 5 m Pfeilhöhe und beträgt die wagrechte Projektion der Belastung 1500 kg für ein Meter Länge, so wird $H = 135000$ kg, $V = 1500x$, und die Gleichung $y = \frac{1}{180}x^2$ liefert die Länge der zu einem Kurvenpunkt mit der Abszisse x gehörigen Hängestange.

Fig. 17.

Fig. 18.

39. Über einen zylindrischen Körper sei vom Punkte A_1 bis zum Punkte A_2 eines zur Achse des Zylinders rechtwinkligen ebenen Querschnitts ein Seil gelegt. Es wird ferner angenommen, daß der Zylinder fest gelagert, also gegen Drehung gesichert ist. An dem einen Ende A_1 des auf dem Zylinder lagernden Seilstückes wirke eine in der Ebene des genannten Querschnitts liegende tangentiale Kraft P_1, und es wird nun gefragt, welche tangentiale in derselben Ebene liegende Kraft P_2 an dem Ende A_2 angreifen muß, um die Kraft P_1 zu überwinden (Fig. 18).

Jedenfalls muß $P_2 > P_1$ sein, und zwar ist die Grenze, bei der noch Gleichgewicht stattfindet, durch eine Gleichung von der Form

(1) $$P_2 = P_1 + W$$

gegeben, wo W den Reibungswiderstand des Seils und des Zylinders bezeichnet. Sobald $P_2 > P_1 + W$ ist, wird von P_2 die Kraft P_1 und der Widerstand W überwunden.

Zur Bestimmung von W betrachten wir zunächst ein kleines Element $ds = M_1M_2$ des Seiles. Die in den Endpunkten M_1, M_2 dieses Seiles wirkenden Spannungen $S_1 = S$ und $S_2 = S + dS$ fallen in die Richtung der in M_1 bzw. M_2 gezogenen Tangente des Elementes M_1M_2 (Fig. 19). Durch diese Spannungen wird gegen den Zylinder ein Normaldruck dN des Seilelementes hervorgerufen, dessen Betrag sich ergibt, wenn man in der Mitte M von M_1M_2 die Normale MC zieht und die in Richtung dieser Normale fallenden Komponenten der Spannungen S_1 und S_2 zueinander addiert. Wird der

Fig. 19.

Winkel M_1CM_2 mit $d\psi$ bezeichnet, so ist $\sphericalangle M_1CM = \sphericalangle MCM_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle d\psi$, und die Summe der beiden genannten Komponenten, also der Normaldruck dN wird

$$dN = (S_1 + S_2)\sin\tfrac{1}{2}\,d\psi = (2S + dS)\sin\tfrac{1}{2}\,d\psi.$$

Bei Benutzung der Reihe für $\sin\frac{1}{2}\,d\psi$ (Teil I, S. 80) und bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung Ordnung kann hierfür

$$(2) \qquad dN = 2S \cdot \tfrac{1}{2}\,d\psi = S\,d\psi$$

gesetzt werden.

Der Reibungswiderstand dW des Elementes ds ist nach der Lehre von der Reibung dem zugehörigen Normaldruck proportional, etwa gleich μdN, wo μ den Reibungskoeffizienten bezeichnet. Diese Reibungskraft ist im Grenzzustande des Gleichgewichts gleich dem Unterschied

$$S_2 - S_1 = dS$$

der in M_2 und M_1 bestehenden Seilspannungen, daher wird

$$(3) \qquad dS = \mu dN = \mu S\,d\psi.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung bestimme man die Beziehung, die zwischen den an den Enden A_1, A_2 des Seiles wirkenden Kräften P_1, P_2 und dem Winkel α der in A_1 und A_2 gezogenen Normalen (Fig. 18) stattfindet.

Offenbar ist

$$\int\frac{dS}{S} = \int\mu\,d\psi \quad \text{oder} \quad \ln S = \mu\psi + \ln c,$$

somit

$$(4) \qquad S = ce^{\mu\psi}.$$

Hier bedeutet natürlich ψ das zu dem Winkel ψ gehörige Bogenmaß, d. h. die zu dem Zentriwinkel ψ eines Kreises vom Radius Eins gehörige Bogenlänge. Wird der Winkel α von OA_1 aus gemessen, so gehören $\psi = 0$ und $S = P_1$ zusammen; daher ist $P_1 = c$ und $S = P_1 e^{\mu\psi}$. Da ebenso $\psi = \alpha$ und $S = P_2$ zusammengehören, folgt

$$(5) \qquad P_2 = P_1 e^{\mu\alpha}.$$

Sobald $P_2 > P_1 e^{\mu\alpha}$ ist, wird die Kraft P_1 und der Reibungswiderstand W durch die Kraft P_2 überwunden. Die Gleichung (5) zeigt außerdem, daß bei hinreichend großem Winkel α eine große Kraft P_2 durch eine verhältnismäßig kleine Kraft P_1 im Gleichgewicht gehalten werden kann, besonders dann, wenn $\alpha > 2\pi$ ist, also das Seil mehr als einmal um den Zylinder geschlungen wird. So erklärt sich die Tatsache, daß

ein Schiff, das landen soll, am Zurückgleiten verhindert werden kann, wenn man ein an dem Schiff befestigtes Seil mehrmals um einen am Land befindlichen Pfosten (Spill) herumschlingt.

Für den Widerstand W ergibt sich aus (1) und (5)

$$W = P_1(e^{\mu\alpha} - 1). \tag{6}$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurde angenommen, daß das Seil völlig biegsam sei; ferner wurde das Gewicht des Seils nicht berücksichtigt. Die Betrachtungen gelten übrigens auch, wenn statt des Seiles ein Lederriemen über den Zylinder gelegt ist. Sie sind außerdem *vom Radius des Zylinders unabhängig,* gelten also, welche Größe dieser Radius auch haben mag. Nur der Winkel $A_1 O A_2$, den die in den Enden A_1, A_2 des aufgelagerten Seilstückes in der Ebene des Querschnittes $P_1 A_1 A_2 P_2$ gezogenen Normalen miteinander bilden und der Reibungskoeffizient μ sind neben P_1 und P_2 in den abgeleiteten Gleichungen enthalten. Überhaupt gelten[1]) diese Ergebnisse auch dann, wenn der Querschnitt des Zylinders ein konvex gekrümmtes Oval ist.

Wir teilen noch einige Werte des Reibungskoeffizienten μ mit.[2]) Für Hanfseile auf eisernen Scheiben oder Eisentrommeln ist $\mu = 0{,}25$, auf Holztrommeln im allgemeinen 0,4, auf rauhem Holz 0,5, auf poliertem Holz 0,33.

Um zu zeigen, wie rasch P_2 mit P_1 wächst, seien noch einige Werte der Größe $e^{\mu\alpha}$ angegeben, bei denen $\mu = 0{,}4$ zugrunde gelegt ist. Es gehören zusammen die Werte

$$\sphericalangle\, \alpha = 120^0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{arc} \alpha = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{und} \quad e^{\mu\alpha} = 2{,}57,$$

ferner

$$\operatorname{arc} \alpha = 2\pi \quad \text{und} \quad e^{\mu\alpha} = 12{,}34, \quad \operatorname{arc} \alpha = \tfrac{5}{2} \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad e^{\mu\alpha} = 535{,}43,$$

$$\operatorname{arc} \alpha = \tfrac{7}{2} \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad e^{\mu\alpha} = 6611{,}4.$$

---

1) Natürlich ist diese Gültigkeit insofern beschränkt, als die abgeleiteten Gleichungen nur eine erste Annäherung an die Wirklichkeit darstellen. Die Reibung ist ein sehr verwickelter Vorgang, der unmöglich mathematisch strenge verfolgt werden kann; dazu kommt, daß die Werte des Reibungskoeffizienten μ auch nur angenähert richtig sind. Über die Reibung bei *Riemen- und Seiltrieben* findet man näheres bei O. Kammerer, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 51 (1907), S. 1085. Zum Studium der Reibung in *Lagern* bei hoher Umfangsgeschwindigkeit verweisen wir auf die Abhandlung von O. Lasche in den vom Verein deutscher Ingenieure herausgegebenen Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 9, Berlin 1903. Vgl. ferner R. Stribeck ebenda Heft 7, Berlin 1903. Die neueste mathematische Theorie der Reibung, insbesondere für die Reibung eines Zapfens in seinem Lager, gibt A. Sommerfeld in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 50 (1904), S. 97—155. Er setzt voraus, daß sich zwischen den beiden einander reibenden Flächen ein Schmiermittel befindet und benutzt hydrodynamische Betrachtungen.

2) Vgl. Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeben vom akademischen Verein „Hütte", 21. Aufl., Bd. 1, Berlin 1911, S. 261f.

Bisher war $P_2 > P_1$ vorausgesetzt. Der entgegengesetzte Fall $P_1 > P_2$ tritt ein, wenn z. B. eine Last P_1 mit Hilfe eines über den Zylinder gespannten Seiles herabgelassen werden soll. Dann muß

$$(7) \qquad P_1 > P_2 e^{\mu\alpha}, \quad \text{d. h.} \quad P_1 e^{-\mu\alpha} > P_2$$

sein; für die Gleichgewichtsgrenze ist $P_1 e^{-\mu\alpha} = P_2$.

Überhaupt findet Gleichgewicht statt, so lange

$$(8) \qquad P_1 e^{\mu\alpha} \geqq P_2 \geqq P_1 e^{-\mu\alpha}$$

ist.

40. Über eine wagrecht gelagerte runde Welle sei ein Hanfseil gelegt, so daß der Winkel α in Fig. 18 gleich 180^0 ist. Am einen Ende des Seiles hängt eine Last P_1 von 300 kg. Welche Kraft müßte an dem anderen Ende ziehen, um diese Last in die Höhe zu befördern? Der Reibungskoeffizient μ betrage 0,33.

$$P_2 = 300 \cdot e^{0,33\pi} = 300 \cdot e^{1,0367} = 845,96 \text{ kg} \sim 846 \text{ kg}.$$

Die gesuchte Kraft müßte also größer als 846 kg sein.

41. Um dieselbe Welle wird ein Seil gelegt, das die Welle einmal ganz umschlingt und dann noch längs des zu einem Winkel von 90^0 gehörigen Bogens berührt. Wie groß darf die am einen Seilende angehängte Last P_2 sein, wenn sie durch eine am anderen Ende wirkende Kraft $P_1 = 15$ kg im Gleichgewicht gehalten wird?

Hier ist

$$\operatorname{arc} \alpha = \tfrac{5}{2}\pi, \quad P_2 = e^{\frac{5}{2}\cdot 0,33\pi} = 200,3 \text{ kg} \sim 200 \text{ kg}.$$

42. Eine Last P_2 von 2400 kg, die an dem einen Ende des um eine eiserne Welle geschlungenen Hanfseiles zieht, soll durch eine Kraft $P_1 = 30$ kg im Gleichgewicht gehalten werden; wie groß ist der Winkel α, der dem vom Seil umspannten Bogen zugehört? Der Reibungskoeffizient μ sei 0,25.

Hier ist

$$2400 = 30 \cdot e^{0,25\alpha}, \quad 0,25\,\alpha = \frac{\log 80}{\log e},$$

$$\operatorname{arc} \alpha = 17,528.$$

Die Anzahl der Umwickelungen der Welle beträgt daher

$$17,528 : 2\pi = 2,790,$$

also etwas über $2\frac{3}{4}$, d. h. man muß das Seil zweimal ganz herumschlingen und dann noch längs eines Bogens anlegen, bei dem der zugehörige Winkel $A_1 O A_2$ etwas mehr wie 3 Rechte beträgt.

43. Wirkt auf einen prismatischen oder zylindrischen elastischen Stab, der am einen Ende unbeweglich befestigt ist, am anderen Ende

eine Kraft P ziehend oder drückend, so erfährt er eine Vergrößerung bzw. Verkürzung seiner ursprünglichen Länge l um einen Betrag λ, und zwar ist, wie man empirisch festgestellt hat, diese Längenänderung der wirkenden Kraft P und der Länge l proportional, hingegen umgekehrt proportional dem Querschnitt q des Stabes. Als Proportionalitätskonstante tritt ein Faktor, der *Dehnungskoeffizient* α auf, der von dem Stoffe des Stabes abhängt und innerhalb gewisser Grenzen (Belastungsgrenzen) konstant ist. Man erhält daher

$$\lambda = \frac{\alpha P l}{q}. \tag{1}$$

Hierbei pflegt man die in dieser Formel auftretenden Längen in Zentimetern, das Gewicht P in Kilogrammen anzugeben; der Zahlenwert α kann Tafeln entnommen werden. Wenn P ziehend wirkt, ist offenbar α das Verlängerungsverhältnis $\lambda : l$, das bei einem Stabe von 1 qcm Querschnitt einer Zugkraft von 1 kg entspricht und *Dehnung* genannt wird. Der Quotient $P : q$ aus der Zug- oder Druckkraft P in kg und dem Flächeninhalt q des Querschnitts in qcm heißt die *Spannung* für einen qcm des Querschnitts; wird sie mit σ bezeichnet, so hat man die Formel für das Gesetz von R. Hooke (gefunden im Jahre 1660, veröffentlicht 1678):

$$\lambda = \alpha \sigma l, \tag{2}$$

das die *Proportionalität der Dehnung und Spannung* ausspricht.

In vielen Lehrbüchern der Elastizität und Festigkeit wird nicht der Dehnungskoeffizient α eingeführt, sondern dessen reziproker Wert $E = 1 : \alpha$, der Elastizitätsmodul; an Stelle von (1) würde alsdann die Formel

$$\lambda = \frac{Pl}{qE} \tag{3}$$

treten. Ist der Stab auf Zug beansprucht, so wird E als diejenige Kraft gedeutet, die einen Stab vom Querschnitt $q = 1$ um seine eigene Länge ausdehnen würde.[1])

Übrigens besteht die Änderung λ der Länge l des Stabes eigentlich aus zwei Teilen; die Zugkraft P bewirkt nämlich außer der elastischen Ausdehnung, die mit Aufhören der Zugkraft verschwindet, noch eine bleibende Ausdehnung. Diese ist aber innerhalb einer gewissen Grenze, der sogenannten Elastizitätsgrenze, meist so klein, daß man sie

---

1) Über die Gründe, weshalb man statt des Elastizitätsmoduls E besser den Dehnungskoeffizienten α einführt, vgl. C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl., Berlin 1911, S. 4—5. Daselbst findet man auch S. 92—97 näheres über andere Annahmen, die für den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung gemacht wurden. Vgl. hierzu noch R. Mehmke in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 42 (1897), S. 327—338; A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, 3. Aufl., Leipzig 1905, S. 45—52.

unberücksichtigt lassen kann. Bei Lederriemen und Hanfseilen kann jedoch die bleibende Ausdehnung ziemlich beträchtlich werden.[1])

Es sei nun ein Stab von l cm Länge und q qcm Querschnitt am oberen Ende vertikal und unbeweglich aufgehängt; man soll die Verlängerung bestimmen, die er durch sein eigenes Gewicht und eine am unteren Ende wirkende Zugkraft von P kg erfährt.

Fig. 20.

Auf ein vom oberen Ende des Stabes um die Länge x entferntes Teilchen m vom Volumen $q\,dx$ wirkt das Gewicht des unter diesem Teilchen befindlichen Stabvolumens $q(l-x)$ und die Zugkraft P (Fig. 20). Ist γ das Gewicht der Volumeinheit (1 cdm) des Stoffes, aus dem der Stab besteht, in Kilogrammen, so wirkt an dem Teilchen m insgesamt die Kraft $P + \frac{1}{1000}\gamma q(l-x)$ senkrecht nach unten, und zwar muß hier $\gamma q(l-x)$ noch durch 1000 dividiert werden, weil die Längen in cm angegeben werden sollten, das Gewicht sich aber auf ein cdm des Stoffes bezieht. Die durch diesen Zug entstehende Verlängerung des Teilchens m beträgt

$$d\lambda_1 = \{P + 0{,}001\,\gamma q(l-x)\}\frac{\alpha\,dx}{q},$$

die gesamte Verlängerung des Stabes ist daher

$$(4) \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha}{q}\int_0^l \{P + 0{,}001\,\gamma q(l-x)\}\,dx = \frac{\alpha l}{q}\left(P + \frac{0{,}001\,\gamma q l}{2}\right),$$

und wenn man das Gewicht $G = 0{,}001\,\gamma q l$ des ganzen Stabes einführt, folgt

$$(5) \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha l}{q}\left(P + \frac{1}{2}G\right).$$

Im Falle $P = 0$ ist $\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{\alpha l G}{q}$; die Dehnung, die ein vertikal aufgehängter Stab durch sein eigenes Gewicht G erfährt, ist daher halb so groß wie die Dehnung, die ein am unteren Ende des gewichtslos gedachten Stabes angehängtes Gewicht G hervorbringen würde.

Wirkt am unteren Ende des Stabes keine Zugkraft, sondern ein vertikal nach oben gerichteter *Druck* P, so ist die Längenänderung:

$$(6) \qquad \lambda_2 = \frac{\alpha l}{q}\left(\frac{1}{2}G - P\right),$$

eine Verkürzung der Stablänge tritt daher erst für $P > \frac{1}{2}G$ ein, denn erst dann wird λ_2 negativ.

1) Näheres über diese „elastische Nachwirkung" findet man z. B. bei C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl., Berlin 1911, S. 89, S. 98—100, S. 145 ff.

Die durch eine Zugkraft hervorgerufene Spannung, bei der ein Stab vom ursprünglichen Querschnitt 1 qcm zerreißt, heißt die Festigkeitszahl in bezug auf das *Zerreißen* oder die Zugfestigkeit des Stoffes, aus dem der Stab besteht, sie wird häufig durch K_z bezeichnet. Eine entsprechende Bedeutung hat die Festigkeitszahl in bezug auf das *Zerdrücken,* die Druckfestigkeit K.

Wir wollen nachstehend für einige Stoffe die Zahlen $1 : \alpha = E$, K_z und K in kg/qcm angeben[1]):

	Gußeisen	Flußeisen	Kiefernholz (parallel z. Faser)	Eichenholz (parallel z. Faser)
$E = \frac{1}{\alpha}$	1000000	2150000	100000	110000
K_z	1500	4000	800	1000
K	7000	4000	300	400

Von den Festigkeitszahlen wohl zu unterscheiden sind die beim Hochbau oder Maschinenbau *zulässigen Spannungen* k_z und k bei Zug oder Druck. Für die eben erwähnten Stoffe haben diese Spannungen *bei ruhender Belastung* folgende Werte[2]):

		Gußeisen	Flußeisen	Kiefernholz (parallel z. Faser)	Eichenholz (parallel z. Faser)
im Hochbau	k_z	250	875 bis 1000	100	100
	k	500	875 bis 1000	60	80
im Maschinenbau	k_z	300	1000		
	k	900	1000		

44. Im Anschluß an das Ergebnis von Aufg. 43 löse man folgende Aufgabe: Eine 15 m lange vertikale Stange aus Flußeisen wird durch ihr Eigengewicht und eine am unteren Ende angehängte Last von 2000 kg

1) Vgl. Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeb. vom akad. Verein „Hütte“, 21. Aufl., Bd. 1, Berlin 1911, S. 513—518. Die Firma F. Krupp in Essen stellt einen *Nickelstahl* her, dessen Zugfestigkeit die von Flußeisen weit übertrifft; bei Schmiedestücken von geringeren Abmessungen konnte sogar eine Zugfestigkeit bis zu 219 kg/qmm = 21900 kg/qcm festgestellt werden. Näheres hierüber sowie über die Verwendung des Nickelstahls in der Technik und über gewisse Mängel desselben findet man bei A. Stodola, Die Dampfturbinen, 4. Aufl., Berlin 1910, S. 275—278.

2) Vgl. Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeb. vom akad. Verein „Hütte“, 21. Aufl., Bd. 1, Berlin 1911, S. 523—526.

auf Zug beansprucht. Wie groß muß der kreisförmige Querschnitt der Stange sein, wenn die höchste zulässige Spannung $k_z = 1000$ kg/qcm beträgt und welche Verlängerung λ erfährt die Stange durch ihr Eigengewicht und die angehängte Last? Das Gewicht der Volumeinheit Eisen ist 7,8 kg/cdm, der Dehnungskoeffizient $\alpha = 1 : E = 1 : 2150000$.

Den Querschnitt q findet man nach S. 27 mit Hilfe der Gleichung

$$k_z = 1000 = \left(2000 + \frac{1500\, q \cdot 7{,}8}{1000}\right) : q$$

wobei in der Klammer der erste Summand das Gewicht der angehängten Last, der zweite Summand das Eigengewicht der Stange darstellt. Man findet $q = 2{,}02$ qcm.

Die Verlängerung wird nach (5):

$$\lambda = \frac{1500}{2{,}02 \cdot 2150000}\left(2000 + \frac{1500 \cdot 2{,}02 \cdot 7{,}8}{2000}\right) = 0{,}69 \text{ cm.}$$

45. Es seien b_1 und b_2 die in Millimetern angegebenen Barometerstände an zwei Orten, die sich nahezu auf einer und derselben Vertikalen in den Höhen z_1 bzw. $z_2 > z_1$ über dem Niveau des Meeres befinden. Man soll zeigen, daß alsdann der Höhenunterschied $z_2 - z_1$ der beiden Orte in Metern *angenähert* durch die Formel

$$z_2 - z_1 = 18400 \log \frac{b_1}{b_2} \text{ Meter}$$

dargestellt werden kann.

Hierbei ist angenommen, daß die Luftsäule, die sich vom einen zum anderen Ort erstreckt, eine gleichmäßige Temperatur von 0^0 hat und vollkommen trocken ist; die Änderung der Beschleunigung der Schwere mit der Höhe ist nicht berücksichtigt. Für die Änderung des Gewichts der Volumeinheit Luft mit der Höhe, also mit dem auf ihr lastenden Druck ist das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz zugrunde gelegt, nach dem bei konstanter Temperatur der Druck, den ein Gas ausübt, in umgekehrtem Verhältnis zu seinem Volumen, also in geradem Verhältnis zu seinem spezifischen Gewicht oder dem Gewicht einer Volumeinheit des Gases steht (vgl. Teil I, S. 34).

Es sei p der Druck in kg, den die Luft in der Höhe z Meter über dem Niveau des Meeres auf ein etwa wagrechtes Flächenstück von 1 qm Inhalt ausübt; $p + dp$ sei die entsprechende Größe in der Höhe $z + dz$. Der Druck $f \cdot p$ den die Luft in der geringeren Höhe z auf ein solches Flächenstück vom Inhalt f qm ausübt, ist alsdann größer als der auf eine gleich große Fläche in der Höhe $z + dz$ wirkende Druck, und zwar ist der Unterschied offenbar gleich dem Gewicht der kleinen Luftsäule von der Höhe dz, die sich zwischen den beiden Flächen befindet. Ist

γ das Gewicht der Volumeinheit (1 cbm) Luft in der Höhe z, so wird also

$$fp = f(p + dp) + f\gamma \cdot dz$$

oder

$$dp = -\gamma dz. \tag{1}$$

Ist nun γ_0 das Gewicht der Volumeinheit Luft unter dem Druck p_0, so besteht bei Voraussetzung gleicher Temperatur, nach dem Gesetz von **Boyle, Mariotte** und **Gay-Lussac** die Beziehung $p : p_0 = \gamma : \gamma_0$, aus der $\gamma = p\gamma_0 : p_0$ folgt, und durch Substitution in (1) ergibt sich

$$dz = -\frac{p_0}{\gamma_0}\frac{dp}{p} \quad \text{oder} \quad \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{p_0}{\gamma_0}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}, \tag{2}$$

wo p_1 und p_2 die Luftdrucke in den Höhen z_1 und z_2 bedeuten. So folgt

$$z_2 - z_1 = -\frac{p_0}{\gamma_0}(\ln p_2 - \ln p_1) = \frac{p_0}{\gamma_0}\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{3}$$

Da der Luftdruck dem Barometerstand proportional ist, kann der Quotient $p_1 : p_2$ durch $b_1 : b_2$ ersetzt werden. Will man ferner statt der natürlichen gewöhnliche Logarithmen einführen, so ist die Beziehung $\log\frac{b_1}{b_2} = M \ln\frac{b_1}{b_2}$ zu benutzen, in der M den Modul 0,43429 der gewöhnlichen Logarithmen bedeutet (vgl. Teil I, S. 81), man hat daher $\ln\frac{b_1}{b_2}$ durch $\frac{1}{M}\log\frac{b_1}{b_2}$ zu ersetzen, und hier ist $1 : M = 2{,}30258$. Die Zahlenwerte von p_0 und γ_0 sind für trockene Luft und bei einer Temperatur von 0^0 C: $p_0 = 10333$ kg/qm, $\gamma_0 = 1{,}293$ kg/cbm (vgl. Teil I, S. 34); mit ihnen findet man $p_0 : M\gamma_0$ rund gleich 18400, daher

$$z_2 - z_1 = 18400 \log\frac{b_1}{b_2} \text{ Meter.} \tag{4}$$

Eine weit verwickeltere Formel erhält man bei Berücksichtigung des Einflusses der Temperatur, der Feuchtigkeit der Luft, der Änderung der Schwere mit der Höhe und geographischen Breite; wir verweisen in dieser Hinsicht auf die ausführlicheren Lehrbücher der Physik und Geodäsie.[1])

Mit der soeben abgeleiteten Formel (4) kann man angenähert die sogenannte *Höhenstufe* berechnen, d. i. die in Metern ausgedrückte Höhe,

---

1) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., Leipzig 1910, S. 140—142; F. Auerbach im Handbuch der Physik, hrsgg. von A. Winkelmann, 2. Aufl., Bd. 1, Leipzig 1908, S. 103 f.; H. Hohenner, Geodäsie, Leipzig und Berlin 1910, S. 262—271; S. Günther, Handbuch der Geophysik, Bd. 2, Stuttgart 1899, S. 60—64.

um die man steigen muß, wenn der Barometerstand um 1 mm abnehmen soll. Zu ihrer Berechnung möge ein mittlerer Barometerstand $b_1 = 760$ mm angenommen werden; b_2 ist alsdann 759 mm. Man findet $z_2 - z_1 = 10{,}5$ m. Dies ist freilich nur ein mittlerer Wert; in Wirklichkeit ist die Höhenstufe nicht nur von der Höhe abhängig, in der man sich befindet, sondern auch von der Temperatur; zwischen 760 und 600 mm Barometerstand und bei dem Temperaturintervall von -15^0 bis $+30^0$ C sind z. B. 10,0 m und 14,7 m extreme Beträge der Höhenstufe.[1])

46. Man bestimme den am Endpunkt einer elektrischen Leitung von l m Länge und bei einem Querschnitt des Leitungsdrahtes von q qmm vorhandenen Spannungsverlust ε in Volt, wenn eine längs der ganzen Leitung gleichmäßig verteilte Stromabnahme stattfindet und die Stromstärke am Anfangspunkte der Leitung J Ampère beträgt. Hierbei ist zu beachten, daß der Widerstand des Leitungsdrahtes in Ohm gleich $\frac{c\,l}{q}$ ist, wo l die Länge des Drahtes in Metern, c den spezifischen Leitungswiderstand des Materials bezeichnet, aus dem der Draht besteht (vgl. Teil I, Fußnote zu S. 147).

Die Stromstärke i in der Entfernung λ vom Anfangspunkte der Leitung ergibt sich aus der Proportion

$$i : J = (l - \lambda) : l;$$

nach dem Ohmschen Gesetz ist daher

$$\varepsilon = \int_0^l \frac{J(l-\lambda)}{l} \frac{c\,d\lambda}{q} = \frac{cJ}{lq} \int_0^l (l - \lambda)\,d\lambda = \frac{cJl}{2q}.$$

47. In einem feststehenden Gefäß von der Gestalt eines vertikalen geraden Kreiszylinders (Radius a) befindet sich eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse des Zylinders rotierende Flüssigkeit. Welche Gestalt nimmt ihre Oberfläche (Gleichgewichtsoberfläche, Niveaufläche) in Folge der Rotation an?

Man wähle die Achse des Zylinders als z-Achse eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems, deren positive Richtung sich vertikal nach oben erstreckt; der Koordinatenanfang sei der Schnittpunkt der z-Achse mit der Basis des Zylinders, in der also auch die x- und y-Achse gelegen sind. Es genügt alsdann den Vorgang in einer beliebigen durch die z-Achse gelegten Ebene weiter zu verfolgen, denn in jeder solchen Ebene ist der Bewegungsvorgang der gleiche. Auf ein Flüssigkeitsteilchen (einen materiellen Punkt) Q von der Masse m, das

1) In dem vorerwähnten Buche von Hohenner enthält S. 266 eine graphische Darstellung, aus der man die zu bestimmten Höhen und Temperaturen gehörigen Höhenstufen sehr bequem ablesen kann.

von der Achse um die Strecke $NQ = r$ entfernt ist (Fig. 21), wirkt die Schwerkraft mg in der negativen Richtung der z-Achse (g ist die Beschleunigung der Schwere), ferner in der Richtung NQ die Zentrifugalkraft K. Hat das Teilchen Q die Geschwindigkeit $v = r\omega$, so ist bekanntlich $K = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$. Entsprechendes gilt für ein an der Oberfläche liegendes Teilchen P. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß die Summe der auf die Tangente von P fallenden Komponenten der auf P wirkenden Kräfte verschwinden. Ist α der Winkel, den die Tangente PT mit der durch P gelegten Horizontalen PH bildet, so sind $m\omega^2 r \cos\alpha$ und $-mg\sin\alpha$ die genannten Komponenten, die die Gleichung

Fig. 21.

$$(1) \qquad m\omega^2 r\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

erfüllen müssen. Hieraus folgt

$$(2) \qquad z = \int \frac{\omega^2}{g} r\,dr = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c.$$

Ist für $r = 0$ die Koordinate $z = z_0 = OS$, so folgt $c = z_0$ und

$$(3) \qquad z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

und bei Einführung von $r^2 = x^2 + y^2$ erhält man

$$(4) \qquad z - z_0 = \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2g},$$

die Gleichung eines *Rotationsparaboloids*, das durch Drehung der in der xz-Ebene gelegenen Parabel $z - z_0 = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$ um die z-Achse entsteht.

Macht die Flüssigkeit in der Sekunde n Umläufe um die Achse, so ist hierbei $\omega = 2n\pi$. An der Wand des Gefäßes steigt die Flüssigkeit bis zur Höhe

$$(5) \qquad z_1 = z_0 + \frac{a^2\omega^2}{2g}.$$

Bei Aufg. 8 in § 18 wird gezeigt werden, daß zwischen der Höhe h, bis zu der die Flüssigkeit das Gefäß füllt, wenn keine Rotation vorhanden ist, und den bei der Rotation auftretenden Größen z_0 und z_1 die einfache Beziehung stattfindet

$$(6) \qquad h = \tfrac{1}{2}(z_0 + z_1).$$

Setzt man dies als bewiesen voraus, so folgt aus (5) und (6) für die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit rotieren muß, damit sie bis zur Höhe z_1 ansteigt, der Ausdruck

$$\omega = \frac{2}{a}\sqrt{g(z_1 - h)}. \tag{7}$$

Aus (6) folgt außerdem, daß *der ursprünglich wagrechte Spiegel der Flüssigkeit infolge der Rotation in der Mitte um ebensoviel sinkt wie er an der Wand des Gefäßes steigt.*[1])

48. Welche Gleichgewichtsoberfläche (Niveaufläche) bildet der Wasserspiegel in der Schaufel eines sich um eine wagrechte Achse drehenden oberschlächtigen Wasserrades?

Es genügt, den Vorgang in der vertikalen Ebene (xy-Ebene) zu betrachten, die durch ein Wasserteilchen P rechtwinklig zur Radachse (z-Achse) gelegt wird; dabei erstrecke sich die positive Richtung der y-Achse vertikal nach oben.

Fig. 22.

Auf ein solches Teilchen P von der Masse m, das sich an der Oberfläche des eine beliebige Radzelle füllenden Wassers im Abstand r von der Achse des Rades befindet, wirkt die Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$ und die Schwere mg (Bezeichnungsweise wie in Aufg. 47). Auch jetzt muß wieder die Summe der auf die Tangente von P fallenden Komponenten dieser Kräfte verschwinden. Bildet die positive Richtung der x-Achse mit dieser Tangente den Winkel α, mit dem Radiusvektor r von P den Winkel ϑ, so sind $m\omega^2 r\cos(\alpha - \vartheta)$ und $-mg\sin\alpha$ die genannten Komponenten (Fig. 22), wobei $\cos\vartheta = x:r$, $\sin\vartheta = y:r$ ist. Man erhält daher

$$\omega^2 r\cos(\alpha - \vartheta) - g\sin\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \omega^2 r\left(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\sin\alpha\right) - g\sin\alpha = 0,$$

und wenn $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ eingeführt wird, folgt

$$\omega^2(x\,dx + y\,dy) - g\,dy = 0$$

also

$$\omega^2\int x\,dx = \int (g - \omega^2 y)\,dy \quad \text{oder} \quad \omega^2(x^2 + y^2) = 2gy + c,$$

wo c die Integrationskonstante bedeutet. Da die letzte Gleichung einen in der xy-Ebene liegenden Kreis darstellt, dessen Mittelpunkt die Koor-

1) Kennt man den Betrag, um den die Mitte des Spiegels der Flüssigkeit infolge der Rotation sinkt, so läßt sich daher die Winkelgeschwindigkeit ω leicht bestimmen. Auf dieser Tatsache beruht der von O. Braun konstruierte Messer für Umdrehungsgeschwindigkeiten. Vgl. O. Braun, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 37 (1893), S. 593 und C. Fehlert, ebenda, Bd. 38 (1894), S. 475.

dinaten $x_1 = 0$, $y_1 = g : \omega^2$ hat, sind die Niveauflächen in den einzelnen Zellen Teile von konzentrischen Kreiszylindern, deren gemeinsame Achse im Abstand $g : \omega^2$ oberhalb der Drehachse des Wasserrades und parallel zu dieser gelegen ist.

Macht das Rad in der Minute n Umdrehungen, so ist $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ und $y_1 = g : \omega^2$ wird $60^2 \cdot g : (2n\pi)^2$, wofür man abgerundet $\left(\frac{30}{n}\right)^2$ setzen kann, denn $g = 9{,}81$ und $\pi^2 = 9{,}87$ sind nahezu einander gleich. Bei einem Rad, das in der Minute 10 Umdrehungen macht, würde also die gemeinsame Achse der Zylinderflächen etwa 9 Meter über der Radachse liegen.

49. Auf einen an zwei Stellen A und B horizontal gelagerten prismatischen oder zylindrischen Balken (Träger) von der Länge l wirken verschiedene Kräfte (Belastungen) $P_1, P_2, P_3, \ldots$, die sämtlich senkrecht nach unten gerichtet sind und in einer durch die Schwerpunktsachse des Balkens gehenden vertikalen Ebene liegen mögen; diese sei zugleich eine Symmetrieebene des Balkens. Wir denken uns die Angriffspunkte der Kräfte in der Schwerpunktsachse gelegen, wählen diese als x-Achse eines Koordinatensystems und den links gelegenen Endpunkt dieser Achse als Koordinatenanfang; $x_1, x_2, x_3, \ldots$ seien die Abszissen der Angriffspunkte von $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Ferner seien R_a und R_b die Lagerreaktionen, die an den Stellen A und B (mit den Abszissen a und b) durch $P_1, P_2, P_3, \ldots$ hervorgerufen werden; sie sind als Kräfte anzusehen, die in A und B vertikal nach oben wirken (Fig. 23).

Fig. 23.

Die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ haben das Bestreben jeden zur Schwerpunktsachse des Balkens rechtwinkligen Querschnitt Q um eine in diesem liegende Achse (Biegungsachse) zu drehen, die wagrecht durch den Schwerpunkt von Q geht. Der Schnittpunkt dieses Querschnitts mit der Schwerpunktsachse habe die Abszisse x. Man versteht alsdann unter dem *Biegungsmoment M oder M_x des Querschnitts Q* die algebraische Summe der statischen Momente (Drehmomente) der *links* von Q gelegenen Kräfte und Lagerreaktionen in bezug auf den Schnittpunkt der Balkenachse mit der Ebene des Querschnitts Q. Dabei werden diese Drehmomente positiv gerechnet, wenn sie rechtsdrehend (im Sinn der Bewegung des Uhrzeigers) wirken.

In dem durch nebenstehende Figur dargestellten Fall ist z. B.:

$$(1) \qquad M_x = -P_1(x - x_1) + A(x - a) - P_2(x - x_2).$$

Für den am Ende B befindlichen Querschnitt ergibt sich

$$(2) \qquad M_b = -P_1(l - x_1) + A(l - a) - P_2(l - x_2) - P_3(l - x_3).$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn sich der Balken unter Einwirkung der Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht befindet; in Verbindung mit

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 \tag{2a}$$

kann diese Tatsache 2 zur Bestimmung der Lagerreaktionen A, B dienen. Hierbei ist noch zu bemerken, daß bei den vorstehenden Gleichungen von der Biegung, die der Balken infolge seiner Belastungen erfährt, abgesehen wurde. Die Kräfte P_1, P_2, $P_3, \ldots$ pflegt man in kg auszudrücken, die Abszissen ihrer Angriffspunkte in cm; die Biegungsmomente ergeben sich dann in kgcm.

Unter der *Querkraft*, *Schubkraft* oder *Transversalkraft* V_x inbezug auf den zur Abszisse x gehörigen Querschnitt Q versteht man die algebraische Summe aller *links* von Q wirkenden Kräfte und Lagerreaktionen; diese werden positiv oder negativ in Rechnung gebracht, je nachdem sie vertikal aufwärts oder abwärts wirken.

In dem vorhin betrachteten Beispiel ist

$$V_x = -P_1 + A - P_2\,. \tag{3}$$

Während bisher angenommen wurde, daß der Balken nur an einzelnen Stellen wirkenden Kräften oder Belastungen unterworfen sei, soll nun der Fall betrachtet werden, wo sich die Belastung kontinuierlich über den ganzen Balken oder einen Teil desselben erstreckt. Ist die Belastung q an der Stelle $x = \xi$ eine Funktion $\eta = q(\xi)$, so ist die Belastung eines Balkenelements von der Länge $d\xi$ gleich $q(\xi)d\xi$, und die dem Querschnitt Q (Fig. 24) entsprechende Querkraft wird:

Fig. 24.

$$V_x = A - \int_{x_1}^{x} q(\xi)\,d\xi\,, \tag{4}$$

wobei die Integrationsgrenzen x_1 und x dem Anfangs- und Endpunkt desjenigen links von Q gelegenen Teiles der x-Achse zugehören, längs dessen sich die kontinuierliche Belastung erstreckt. Man nennt $\eta = q(\xi)$ die Gleichung der *Belastungskurve.*

Für das Biegungsmoment M_x des Querschnitts Q ergibt sich

$$M_x = A(x-a) - \int_{x_1}^{x} (x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi\,, \tag{5}$$

und wenn zu der kontinuierlichen Belastung noch Einzelkräfte P_1, P_2, $P_3, \ldots$ hinzutreten, sind in den rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) solche Glieder beizufügen, wie in (3) und (1) durch P_1, P_2 veranlaßt werden.

Im Anschluß an die vorstehenden Ausführungen soll nun die Aufgabe gelöst werden:

Ein Balken RS von der Länge l sei an zwei Stellen A und B, denen die Abszissen $x = a$ bzw. $x = b$ zugehören, wagrecht gelagert und in seiner ganzen Längenausdehnung *gleichförmig* belastet, so daß auf je einen cm Länge q kg Belastung kommen. Man bestimme die Querkräfte, die einem zwischen R und A oder zwischen A und B oder zwischen B und S gelegenen Querschnitt zugehören, ferner das Biegungsmoment für jeden dieser Querschnitte und die Lagerreaktionen der Stellen A und B.

Fig. 25.

Hier ist q eine Konstante, die Belastungskurve also eine Parallele zur x-Achse (Fig. 25).

Bezeichnet x die dem Querschnitt Q zugehörige Abszisse, so ergeben sich folgende Gleichungen:

Für

$$0 < x \leqq a \quad \text{ist} \quad V_x = -qx, \quad M_x = -\int_0^x (x-\xi) q\, d\xi = -\tfrac{1}{2} q x^2;$$

für

$$a < x \leqq b \quad \text{ist} \quad V_x = A - qx, \quad M_x = A(x-a) - \int_0^x (x-\xi) q\, d\xi$$
$$= A(x-a) - \tfrac{1}{2} q x^2;$$

für

$$b < x \leqq l \text{ ist } V_x = A + B - qx, \quad M_x = A(x-a) + B(x-b) - \tfrac{1}{2} q x^2.$$

Zur Bestimmung von A und B benutzt man die Tatsache, daß das für einen Endpunkt des Balkens berechnete Biegungsmoment verschwinden und die Summe $A + B$ der Lagerreaktionen gleich der Gesamtbelastung sein muß. Man erhält hiernach die beiden Gleichungen:

$$M_l = A(l-a) + B(l-b) - \tfrac{1}{2} q l^2 = 0 \quad \text{und} \quad A + B = ql,$$

woraus

$$A = \frac{1}{2} \frac{ql(2b-l)}{b-a}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{ql(l-2a)}{b-a}$$

hervorgeht. Haben die Stellen $x = a$ und $x = b$ von den Enden der Balkenachse gleichen Abstand ($b = l - a$), so werden aus Gründen der Symmetrie A und B einander gleich und natürlich gleich $\frac{1}{2} ql$.

Zur Bestimmung der Größenverhältnisse eines Balkens, der eine gewisse Belastung tragen soll, ist die Kenntnis des *absolut größten* Biegungsmomentes, das bei dieser Belastung vorkommt, von Wichtigkeit; der zugehörige Querschnitt pflegt der *gefährliche Querschnitt* genannt zu werden. Hier kommen natürlich bei den einzelnen Intervallen, die an dem Balken mit Rücksicht auf die Stellen $x = a$, $x = b$ der Lagerreak-

tionen A, B, die Anfangs- und Endabszisse der Belastungskurve $\eta = q(\xi)$ und etwaige Einzelbelastungen zu unterscheiden sind, außer den gewöhnlichen Maxima auch *Grenzmaxima* in Betracht (vgl. Teil I, S. 151 f.).

So ist in dem eben behandelten Beispiel $M_a = -\frac{1}{2}qa^2$ das größte Biegungsmoment, das im ersten Intervall vorkommt, die zugehörige Abszisse $x = a$ entspricht der oberen Grenze des Intervalls. In dem zweiten Intervall kommt außer der Grenze $x = b$ die Stelle in Betracht, für die $\frac{dM}{dx}$ verschwindet, offenbar ist für sie $x = A : q$. Man erhält

$$\text{für } x = b \qquad M_b = -\tfrac{1}{2}q(l-b)^2,$$

$$\text{für } x = A : q \qquad M_1 = \frac{A(A - 2aq)}{2q} = \frac{ql(2b-l)(2b-l-2a)(l-2a)}{8(b-a)^2}.$$

Die Stelle mit dem absolut größten Biegungsmoment ist also entweder an einem der beiden Lager, auf denen der Balken ruht, oder an der Stelle $x = A : q$.

In dem schon vorhin betrachteten besonderen Fall $b = l - a$ wird

$$M_a = M_b = -\frac{1}{2}qa^2, \qquad M_1 = \frac{ql(l-4a)}{8}$$

mit der zu M_1 gehörigen Abszisse $x = A : q = \frac{1}{2}l$.

50. Die entsprechende Aufgabe für den Fall zu lösen, wo die beiden *Enden* des Balkens von der Länge l gelagert sind und die Belastung eines Balkenquerschnitts dessen Abstand vom mittelsten Querschnitt proportional ist.

Fig. 26.

Für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}l$ wird hier die Belastung durch die Funktion $q(\xi) = \frac{k(l-2\xi)}{l}$ dargestellt, für das Intervall $\frac{1}{2}l \leqq x \leqq l$ durch die Funktion $q(\xi) = \frac{k(2\xi - l)}{l}$; dabei ist k die an den Enden des Balkens stattfindende Belastung (Fig. 26).

In dem ersten Intervall ist

$$M_x = Ax - \int_{\xi=0}^{\xi=x} (x-\xi)\frac{k(l-2\xi)}{l}\,d\xi$$

oder

$$M_x = Ax - \frac{k}{l}\int_0^x (lx - l\xi - 2x\xi + 2\xi^2)\,d\xi = Ax - \frac{k}{l}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

Die Lagerreaktionen A und B sind hier offenbar gleich groß, und da ihre Summe gleich $\frac{1}{2}kl$ ist, folgt $A = B = \frac{1}{4}kl$, so daß man im ersten Intervall für das Biegungsmoment den Ausdruck

$$M_x = \frac{kx}{12l}(4x^2 - 6lx + 3l^2)$$

erhält.

Im zweiten Intervall ($\frac{1}{2}l \leq x \leq l$) erhält man

$$M_x = Ax - \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}l} (x-\xi)\frac{k}{l}(l-2\xi)d\xi - \int_{\xi=\frac{1}{2}l}^{\xi=x} (x-\xi)\frac{k}{l}(2\xi - l)d\xi$$

oder

$$M_x = Ax - \frac{1}{24}kl(6x-l) - \frac{1}{24}\frac{k}{l}(2x-l)^3,$$

und bei Einführung von $A = \frac{1}{4}kl$ folgt

$$M_x = \frac{1}{24}kl^2 - \frac{1}{24}\frac{k}{l}(2x-l)^3.$$

Das größte Biegungsmoment ergibt sich für $x = \frac{1}{2}l$, sein Betrag ist $M_1 = \frac{1}{24}kl^2$.

Bezüglich weiterer hierher gehöriger Aufgaben, insbesondere auch zur Behandlung des Falles, daß ein wagrechter irgendwie belasteter Träger am einen oder an beiden Enden eingemauert ist, verweisen wir auf die Lehrbücher der Statik und Festigkeitslehre, denn die Bestimmung der bei diesen Aufgaben vorkommenden Integrale bietet kaum Schwierigkeiten. Auch hinsichtlich der *graphischen Lösung* von Aufgaben der eben behandelten Art müssen wir auf die betreffenden Lehrbücher verweisen.

51. Wenn der *Schienenweg einer Eisenbahn* eine *Kurve* beschreibt, wird der äußere Schienenstrang längs dieser Kurve höher gelegt als der innere, um den infolge der Zentrifugalkraft vorhandenen Druck der Räder der Eisenbahnwagen auf die äußere Schiene und die Gefahr der Entgleisung möglichst zu vermeiden. Ist Q das Gewicht eines Wagens, v seine Geschwindigkeit in m/sek., ϱ die Länge des Krümmungsradius in Metern, $m = Q:g$ die Masse des Wagens ($g = 9{,}8$ m/sek^2 die Beschleunigung der Schwere), so ist die Zentrifugalkraft K, wie in den Elementen der Mechanik gezeigt wird, gegeben durch

Fig. 27.

$$K = \frac{mv^2}{\varrho} = \frac{Qv^2}{g\varrho}.$$

Es sei nun h die Überhöhung BH des äußeren Schienenstranges in Metern, α der durch die Überhöhung entstehende Neigungswinkel gegen die Horizontale AB (Fig. 27). Faßt man alsdann Q und K als Kräfte auf, die im Schwerpunkt S des Eisenbahnwagens angreifen, so muß die Resultierende SR dieser beiden Kräfte rechtwinklig zu der Geraden AH

sein, wenn durch die Überhöhung BH der Druck gegen die äußere Schiene aufgehoben werden soll. Man hat also

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{g \varrho} \cdot$$

Ferner ist $\sin \alpha = h : s$, wo $s = AH$ den Abstand der Symmetrielinien der Querprofile der beiden Schienen bezeichnet. Da α jedenfalls ein kleiner Winkel ist, kann man $\operatorname{tg} \alpha$ in (1) durch $\sin \alpha$ ersetzen, wodurch sich

$$\text{(2)} \qquad h = \frac{s v^2}{g \varrho}$$

ergibt. Diese Formel gibt allerdings etwas zu große Überhöhungen, denn bei ihrer Ableitung wurden die Achsen des Wagens als frei beweglich angenommen, und diese Annahme entspricht nicht der Wirklichkeit. Man pflegt bei den preußischen Bahnen die Gleichung (2) durch die empirisch erhaltene Formel

$$\text{(3)} \qquad h = \frac{V}{2 \varrho} \quad \text{oder} \quad (h)_{\text{mm}} = \frac{500\, V}{\varrho}$$

zu ersetzen, wo V die größte bei der betreffenden Krümmung zulässige Geschwindigkeit in km/Stunde, ϱ die Länge des Krümmungsradius in Metern bedeutet; ist die Zahl h nicht durch 5 teilbar, so wird sie auf die nächste Zahl mit der Endziffer 0 oder 5 abgerundet.

Übrigens muß bei allen Krümmungen noch die Spurweite vergrößert werden, doch gehen wir hierauf nicht ein.

Soll nun ein geradlinig verlaufendes Schienengleis in ein nach einem *Kreisbogen* vom Radius R gekrümmtes Gleis übergeführt werden, so kann natürlich die bei der äußeren gekrümmten Schiene erforderliche Überhöhung nicht unmittelbar angebracht werden, vielmehr muß man zwischen Gerade und Kreis einen *Übergangsbogen* einschalten. Längs desselben nimmt der Krümmungsradius von $\varrho = \infty$ beginnend ab bis zum Betrage $\varrho = R$, die Überhöhung wächst von $h = 0$ bis $h = H$. Die Überhöhung des äußeren Schienenstranges soll bei Hauptbahnen, wenn irgend möglich, auf nicht weniger als das 600-fache ihres Betrages auslaufen; die Steigung der Überhöhungsrampe ist alsdann höchstens $1 : 600$, die Länge der Rampe beträgt wenigstens $600\, H$. Setzt man allgemeiner die Steigung der Rampe gleich $1 : n$, so ist ihre Länge $l = n H$.

Fig. 28.

Wählt man nun diejenige Stelle A des Übergangsbogens, an der die geradlinig verlaufende Schiene in diesen Bogen übergeht, als Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die zugehörige Tangente als x-Achse, so kann die von A bis zu irgend einem Punkte S dieses Bogens gerechnete Bogenlänge angenähert durch die Abszisse $OM = x$ des Punktes S ersetzt werden (Fig. 28),

denn die Kurve AS ist in Wirklichkeit nur schwach gekrümmt. Ist h_x die in S notwendige Überhöhung der äußeren Schiene, so hat man also bei hinreichender Genauigkeit die Gleichung

$$\frac{1}{n} = \frac{h_x}{x} = \frac{H}{l}. \tag{4}$$

In diese Gleichung wird nun der der Stelle S des Übergangsbogens zugehörige Krümmungsradius ϱ aus (2) oder (3) eingeführt, und wenn man hierbei die Größe $sv^2n : g$ bzw. $\frac{1}{2}Vn$ gleich P setzt, folgt

$$x = nh_x = \frac{P}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{P}{x}. \tag{5}$$

Bei Anwendung der Formel für die Länge des Krümmungsradius (vgl. Teil I, S. 153)

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

kann im vorliegenden Falle die Ableitung y' gleich Null gesetzt werden, denn y' ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels α, den die geometrische Tangente des zugehörigen Punktes des Übergangsbogens mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt, und dieser Winkel ist jetzt jedenfalls klein. Aus (5) folgt alsdann

$$P\frac{d^2y}{dx^2} = x. \tag{6}$$

Aus dieser Beziehung leite man nunmehr durch zwei einander folgende Integrationen die Gleichung der Übergangskurve ab.

Man erhält zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2P} + c_1,$$

und da für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, wird $c_1 = 0$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2P},$$

woraus durch eine zweite Integration

$$y = \frac{x^3}{6P} + c_2$$

hervorgeht. Die Integrationskonstante c_2 ist wieder Null, denn $x = 0$ und $y = 0$ sind zusammengehörige Werte. *Die Übergangskurve ist somit die kubische Parabel*

$$y = \frac{x^3}{6P}, \tag{7}$$

wofür mit Rücksicht auf $P = lR$ auch

$$y = \frac{x^3}{6lR} \tag{7a}$$

gesetzt werden kann.

Der Kreisbogen, in den diese Kurve überleiten soll, kann natürlich nicht an einem Punkt der Tangente AM beginnen. Soll der Anschluß an ihn in A_1 erreicht werden und hat also dieser Punkt die Abszisse $AM_1 = l$, so wird seine Ordinate $y_1 = l^3 : 6P = l^2 : 6R$.[1])

Es sei noch erwähnt, daß das durchschnittlich empfehlenswerte Minimum der Länge des Krümmungsradius bei Hauptbahnen auf freier Strecke 300 m beträgt, bei Nebenbahnen 250 m; das äußerste Minimum ist für beide Fälle 180 m, falls in die Nebenbahnen auch Fahrzeuge aus den Hauptbahnen übergehen. Was die Größe P betrifft, so ist z. B. für $V = 90$ km, $n = 800$:

$$P = \tfrac{1}{2} Vn = 36000.$$

Die Überhöhung wird nicht vorgenommen, wenn bei Hauptbahnen der Krümmungsradius größer als 3 km, bei Nebenbahnen größer als 2 km ist.

52. Ein geradliniger Schienenstrang soll durch einen Übergangsbogen AA_1 von der Gestalt einer kubischen Parabel in einen kreisförmig verlaufenden Schienenstrang übergeführt werden. Die Stelle A_1, an der die kubische Parabel in den Kreis übergeht, habe bei dem in Fig. 28 zu Grunde gelegten Koordinatensystem die Abszisse $x = l = 60$ m; der Radius des Kreises betrage $R = 500$ m, die größte Fahrgeschwindigkeit der Eisenbahnzüge sei $V = 80$ km/Stunde. Man bestimme die Überhöhung der äußeren Schiene an der Stelle A_1, die Steigung $1 : n$ der Überhöhungsrampe und die Ordinate des Übergangsbogens für die Stellen mit den Abszissen $x = \frac{1}{4} l$, $x = \frac{1}{2} l$ und $x = l$.

Man findet für die Überhöhung an der Stelle A_1 nach (3), S. 40 den Betrag $H = 80 : (2 \cdot 500) = 0{,}08$ m $= 80$ mm; ferner wird

$$1 : n = H : l = 1 : 750.$$

Die Gleichung der Übergangskurve wird nach (7 a):

$$y = \frac{x^3}{180000},$$

---

1) Näheres über die Anlage des Übergangsbogens findet man z. B. bei H. Wegele, Eisenbahnbau, Kapitel 4, S. 292—296 vom Lehrbuch des Tiefbaues, herausgegeb. von K. Esselborn, Leipzig 1904; vgl. ferner H. Hohenner, Geodäsie, Leipzig und Berlin 1910, S. 223—226, sowie „Des Ingenieurs Taschenbuch", herausgegeb. vom akad. Verein „Hütte", 21. Aufl., 3. Bd., Berlin 1911, S. 796—798, endlich die für die Preußisch-Hessischen Eisenbahnen gültigen „Vorschriften für die Herstellung, Unterhaltung und Erneuerung des Oberbaues", Ausgabe 1909, Bromberg 1909.

für $x = \frac{1}{4} l = 15$ m wird daher $y = 0{,}019$ m; ferner gehören zusammen die Werte $x = \frac{1}{2} l = 30$ m und $y = 0{,}15$ m, sowie $x = l = 60$ m und $y = 1{,}2$ m.

53. Schon in Teil I, S. 34 wurde das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz erwähnt, das eine Beziehung zwischen dem Druck, dem Volumen und der Temperatur eines idealen Gases ausspricht. Ist v das Volumen seiner Gewichtseinheit, eines kg, in cbm, p der in kg anzugebende Druck, den das Gas auf die Flächeneinheit (1 qm) der Wandung des Gefäßes ausübt, in dem sich das Gas befindet, und ist T seine vom absoluten Nullpunkt (-273^0 C) an gerechnete Temperatur, so findet das genannte Gesetz seinen Ausdruck in der Formel

$$(1) \qquad pv = RT,$$

wo R eine dem betreffenden Gas eigentümliche Konstante, die Gaskonstante, bedeutet.

Auch wurde bereits a. a. O. näher ausgeführt, daß die einem Körper zugeführte Wärmemenge dQ zum Teil eine Änderung dU der inneren Energie des Körpers (Änderung der Temperatur und der Kohäsion der Moleküle) zur Folge hat, zum Teil zur Leistung äußerer Arbeit dL (z. B. Überwindung eines Druckes) dient; bezogen auf die *Gewichtseinheit* des Körpers ist

$$(2) \qquad dQ = \frac{1}{W}(dU + dL).$$

Hier bezeichnet W das *mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit*, einer Kilogrammkalorie (vgl. S. 5), d. h. W ist die in Kilogrammetern gemessene Arbeit, die geleistet wird, wenn man ein Kilogramm Wasser von $14\frac{1}{2}{}^0$ C auf $15\frac{1}{2}{}^0$ C erwärmt. Wie schon auf S. 6 bemerkt wurde, ist $W = 427$ kgm. Bei Einführung von $1 : W = A = 1 : 427$ erhält man aus (2):

$$(3) \qquad dQ = A(dU + dL),$$

und diese Formel ist nun der mathematische Ausdruck für den sogen. *ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.*

Die den Gleichungen (2) und (3) zu Grunde liegende Einheit der Wärmemenge ist die Kilogrammkalorie; sollen die Ergebnisse dieser Gleichungen in Kilogrammetern ausgedrückt werden, so sind sie zu schreiben in der Form

$$(3\text{a}) \qquad WdQ = dU + dL.$$

Besteht die äußere Arbeit darin, daß unter einem Druck p eine Volumänderung dv hervorgebracht wird, so kann man bei den idealen Gasen die Gleichung (3) durch

$$(4) \qquad dQ = c_v dT + Apdv$$

oder durch

$$(4a)\qquad dQ = \frac{1}{R}\,(c_v v\,dp + c_p p\,dv)$$

ersetzen, wo $c_v = A\frac{dU}{dT}$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck bedeutet (vgl. Teil I, S. 35); dabei ist

$$(5)\qquad c_p - c_v = AR.$$

Erfährt nun ein Gas eine Zustandsänderung, bei der p, v und T andere Werte annehmen, *ohne daß dem Gas Wärme zugeführt oder entzogen* wird, so bezeichnet man eine solche Zustandsänderung als *adiabatisch*[1]), d. h. undurchlässig. Hiermit soll ausgedrückt werden, daß sich die Änderung so vollzieht, als befinde sich der Gasbehälter in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle.

Es soll nun gezeigt werden, daß in diesem Falle die Größen p und v mit Rücksicht auf (4a) und auf $dQ = 0$ an eine Gleichung von der Form

$$(6)\qquad pv^{\varkappa} = \text{konst} = C$$

gebunden sind[2]), wo $\varkappa$ den Quotienten $c_p : c_v$ bedeutet.

Man hat

$$(7)\qquad c_v v\,dp + c_p p\,dv = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} + \varkappa\frac{dv}{v} = 0,$$

somit

$$\int\frac{dp}{p} + \varkappa\int\frac{dv}{v} = 0 \quad \text{und} \quad \ln p + \varkappa \ln v = \text{konst.}$$

Schreibt man die Gleichung (6) für einen durch p_0, v_0 gegebenen Anfangs- oder Endzustand hin, so folgt

$$(8)\qquad pv^{\varkappa} = p_0 v_0^{\varkappa}.$$

54. Man zeige, daß die Temperatur eines Gases bei adiabatischer Ausdehnung sinkt, bei adiabatischer Kompression steigt.

Mit Rücksicht auf $dQ = 0$ hat man nach (4):

$$c_v dT + Ap\,dv = 0$$

oder auch (wegen (1))

$$c_v dT + ART\frac{dv}{v} = 0,$$

somit

$$c_v\int\frac{dT}{T} + AR\int\frac{dv}{v} = C.$$

---

1) Vom griechischen διαβαίνειν, hindurchgehen, abgeleitet, dem ein α privativum vorgesetzt ist.

2) Diese Gleichung wurde zuerst von S. D. Poisson aufgestellt, Annales de chimie et de physique, Bd. 23 (1823), S. 15.

Werden die Integrationen ausgeführt und werden in die so erhaltene Gleichung einmal die zusammengehörigen Werte T_0, v_0, ein andermal die Werte T_1, v_1 eingesetzt, so folgt durch Subtraktion

$$c_v \ln \frac{T_1}{T_0} = AR \ln \frac{v_0}{v_1}. \tag{9}$$

Im Falle $v_1 > v_0$ (bei Ausdehnung) muß, wie diese Gleichung zeigt, $\ln \frac{T_1}{T_0}$ negativ, d. h. $T_0 > T_1$ sein, die Temperatur muß sinken.[1]) Umgekehrt ist das Verhalten im Falle $v_1 < v_0$.

Die erhaltene Gleichung läßt sich übrigens mit Rücksicht auf $c_p : c_v = \varkappa$ und $c_p - c_v = AR$ (vgl. (5) in Aufg. 53) in der Form

$$\ln \frac{T_1}{T_0} = (\varkappa - 1) \ln \frac{v_0}{v_1} \quad \text{oder} \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\varkappa - 1} \tag{10}$$

schreiben.

Eine adiabatische Kompression ist vermutlich die wesentliche Ursache der *Erwärmung der Luft beim Föhnwind* in den Alpen. Indem eine größere Luftmenge *rasch* von den Gipfeln der Alpen in die Ebene herabsinkt, wird die Luft nahezu adiabatisch komprimiert und die Temperatur steigt.[2])

Aus $p_0 v_0 = RT_0$ und $p_1 v_1 = RT_1$ folgt noch $v_0 : v_1 = T_0 p_1 : T_1 p_0$, so daß man bei Einführung dieses Ausdrucks in (10) die wichtige Beziehung

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{11}$$

erhält oder, wie *v. Helmholtz* zu schreiben empfahl[3])

$$\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{c_p - c_v}} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\frac{1}{c_v}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{c_p}}. \tag{11a}$$

Noch eine andere Form der Gleichung (10) möge erwähnt werden; sie ergibt sich sofort, wenn man das Verhältnis $v_1 : v_0 = \alpha$ setzt, nämlich

$$T_1 - T_0 = T_0 \left(\frac{1}{\alpha^{\varkappa - 1}} - 1\right). \tag{12}$$

---

1) Die Tatsache, daß die Temperatur eines Gases bei adiabatischer Ausdehnung sinkt, wird bei der Konstruktion zahlreicher Kältemaschinen verwertet.

2) Vgl. hierzu Th. Reye in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9, (1864), S. 260; A. Trientl in den Mitteilungen des Österreichischen Alpenvereins, Bd. 2 (1864), S. 38; H. v. Helmholtz, Eis und Gletscher, Vortrag vom Jahre 1865, abgedruckt in „Vorträge und Reden", 4. Aufl., Bd. 1, Braunschweig 1896, S. 235; J. Hann in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie, Bd. 1 (1866), S. 261; Bd. 2 (1867), S. 440 f.; ferner in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 85, 2. Abt. (1882), S. 416—440; F. Kerner von Marilaun in der Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, Bd. 23 (1892), S. 1—16; H. von Ficker, ebenda, Bd. 43 (1912), S. 56 ff.

3) Vorlesungen über Theorie der Wärme, herausgegeb. von F. Richarz, Leipzig 1903, S. 187 f.

Diese Gleichung bestimmt die bei adiabatischer Ausdehnung ($\alpha > 1$) oder Kompression ($\alpha < 1$) erfolgende Änderung $T_1 - T_0$ der Temperatur, wenn die anfängliche Temperatur T_0 bekannt ist.

55. Ein Kilogramm Luft vom Volumen v_0 und von der absoluten Temperatur T_0 ändert sich *adiabatisch*, dehnt sich also entweder adiabatisch aus, oder es wird adiabatisch komprimiert; das neue Volumen sei v_1. Wie groß ist die hierbei geleistete äußere Arbeit L in Kilogrammetern?

Nach (3a) und (4) ist $dL = p\,dv$, daher

$$L = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv. \tag{13}$$

Hier ist nun p von v abhängig auf Grund der Beziehungen

$$pv^{\varkappa} = p_0 v_0^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa};$$

daher folgt

$$L = p_0 v_0^{\varkappa} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^{\varkappa}} = \frac{p_0 v_0^{\varkappa}}{1-\varkappa}\left(v_1^{1-\varkappa} - v_0^{1-\varkappa}\right) = \frac{p_0 v_0^{\varkappa}}{\varkappa - 1}\left(\frac{1}{v_0^{\varkappa-1}} - \frac{1}{v_1^{\varkappa-1}}\right),$$

eine Gleichung, die leicht in die einfachere Gestalt

$$L = \frac{1}{\varkappa - 1}\left(p_0 v_0 - p_1 v_1\right) = \frac{R(T_0 - T_1)}{\varkappa - 1} \tag{14}$$

gebracht werden kann. Bei Einführung von $\varkappa = c_p : c_v$ folgt mit Rücksicht auf (5):

$$L = \frac{c_v}{A}\left(T_0 - T_1\right). \tag{15}$$

56. Im Anschluß an Aufg. 54 und 55 soll die folgende Aufgabe gelöst werden:

Ein Kilogramm Luft vom Volumen v_0 und von der gewöhnlichen Temperatur 10^0 C ($T = 273^0 + 10^0 = 283^0$) wird adiabatisch auf das halbe Volumen komprimiert; welche Temperatur nimmt die Luft hierdurch an und wie groß ist die geleistete Arbeit? Es werde daran erinnert, daß für Luft $R = 29{,}27$ und $\varkappa = 1{,}41$ ist (vgl. Teil I, S. 34 u. 35).

Hier ist $v_0 : v_1 = 2$, daher nach (10):

$$T_1 = 283 \cdot 2^{0{,}41} = 376^0,$$

die gewöhnliche Temperatur beträgt daher $376^0 - 273^0 = 103^0$ C.

Die geleistete Arbeit wird nach (14)

$$L = \frac{29{,}27\,(283 - 376)}{0{,}41} = -\,6639 \text{ kgm}.$$

Dieser Ausdruck ist negativ; in Wirklichkeit hat also die Luft keine äußere Arbeit geleistet, wohl aber hat sie einen Arbeitsgewinn erhalten,

sie hat Arbeit aufgenommen, m. a. W. zur Ausführung der Kompression ist eine mechanische Arbeit von 6639 kgm erforderlich.

Für das Verhältnis der beiden Drucke $p_1 : p_0$ findet man mit Hilfe von (11) $p_1 : p_0 = 2{,}66$, der Druck, den die so komprimierte Luft ausübt ist also 2,66 mal so groß als vor der Kompression. Wollte man das ursprüngliche Volumen v_0 wissen, so müßte zu dessen Berechnung der zugehörige Druck bekannt sein. Nehmen wir an, dieser habe eine Atmosphäre betragen, also 10333 kg/qm [1]), so erhält man v_0 mit Hilfe der Gleichung (1), nämlich

$$v_0 = \frac{R\,T_0}{p_0} = \frac{29{,}27 \cdot 283}{10333} = 0{,}802 \text{ cbm.}$$

Hätte sich das Kilogramm Luft auf sein doppeltes Volumen $v_1 = 2\,v_0$ *ausgedehnt*, so hätte man $T_1 = 213^0$ gefunden, die Temperatur wäre von 283^0 auf 213^0, also von 10^0 C auf -60^0 C gesunken; dabei wäre durch den bei der Ausdehnung auftretenden Druck eine mechanische Arbeit $L = 4997$ kgm verrichtet worden.

57. Wie ändert sich der Zustand eines Gases, wenn ihm eine Wärmemenge Q zugeführt wird, während sein *Volumen konstant* bleibt?

Nun ist $dv = 0$, daher nach (4) in Kalorien

$$Q = c_v \int_{T_0}^{T_1} d\,T = c_v (T_1 - T_0)$$

und nach (4 a)

$$Q = \frac{c_v}{R}\, v_0 \int_{p_0}^{p_1} dp = \frac{c_v v_0 (p_1 - p_0)}{R} = \frac{A\,v_0 (p_1 - p_0)}{\varkappa - 1}.$$

Diese Gleichungen gestatten die Änderung der Temperatur und des Druckes zu berechnen.

58. Die analoge Aufgabe, wenn der *Druck*, unter dem sich das Gas befindet, *konstant* bleibt.

Zunächst möge die Gleichung (4) etwas umgeformt werden. Aus (1) folgt nämlich $p\,dv = R\,d\,T - v\,dp$, und bei Einführung dieses Ausdrucks in (4) erhält man mit Rücksicht auf (5):

$$d\,Q = c_p d\,T - A\,v\,dp.$$

Nun ist $dp = 0$, daher

$$Q = c_p (T_1 - T_0)$$

---

1) Der Druck 10333 kg/qm = 1,0333 kg/qcm pflegt eine *alte Atmosphäre* genannt zu werden; sie ist im Niveau des Meeres gleich dem Druck einer Quecksilbersäule von etwa 760 mm Höhe. In der Technik wird stets die *neue oder metrische Atmosphäre* zugrunde gelegt, die gleich einem Druck von 10000 kg/qm = 1 kg/qcm oder gleich 0,968 alte Atmosphären ist.

und nach (4a)

$$Q = \frac{c_p}{R} p_0 \int_{v_0}^{v_1} dv = \frac{c_p p_0}{R}(v_1 - v_0) = \frac{A p_0 \varkappa (v_1 - v_0)}{\varkappa - 1}.$$

So kann man leicht die Änderungen der Temperatur und des Volumens berechnen.

59. Wie ändert sich der Zustand eines Gases, wenn ihm eine Wärmemenge Q zugeführt, aber andrerseits dafür gesorgt wird, daß seine *Temperatur konstant* bleibt (isothermische Zustandsänderung)?

Nun ist $dT = 0$, daher nach (4) in Kalorien

$$Q = \int A p\, dv = -\int A v\, dp,$$

oder mit Rücksicht auf $pv = RT_0$:

$$Q = ART_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = ART_0 \ln \frac{v_1}{v_0}$$

und

$$Q = -ART_0 \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = ART_0 \ln \frac{p_0}{p_1}.$$

Die zugeführte Wärmemenge wird hier nur zur Leistung äußerer Arbeit verwandt.

60. Für welche Zustandsänderungen ist die einem idealen Gase zugeführte bzw. entzogene Wärmemenge proportional der Temperaturänderung des Gases?

Hier muß $dQ = c \cdot dT$ sein, wo c einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Um nun eine Gleichung zu gewinnen, die nur die Veränderlichen p, v und ihre Differentiale dp, dv enthält, beachte man, daß nach (4) $dQ = c_v dT + A p dv$ und (nach Aufg. 58) $dQ = c_v dT - A v dp$ ist. Mit Rücksicht auf $dQ = c dT$ folgt

$$(c - c_v)\, dT = A p dv \quad \text{und} \quad (c - c_p)\, dT = -A v dp;$$

daher ergibt sich mit Benutzung der Abkürzung $(c - c_p) : (c - c_v) = \mu$:

$$\mu = -\frac{v dp}{p dv} \quad \text{oder} \quad \mu \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dp}{p}.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man

$$\mu \ln v + \ln p = \text{konst}$$

oder

$$p v^\mu = k,$$

wenn als Integrationskonstante $\ln k$ benutzt wird.

Die Kurven, die den Gleichungen dieser Gestalt entsprechen, wenn man p und v als rechtwinklige Koordinaten von Kurvenpunkten deutet, bezeichnete G. Zeuner[1]) als *polytropische Kurven*; die Größe c nannte er die „spezifische Wärme des Gases für die Druckkurve $pv^{\mu} = k$". Im Falle $c = 0$ wird $\mu = \varkappa$, man erhält alsdann die *adiabatischen Kurven* (vgl. (8), S. 44 und Teil I, S. 188 und 160—162).

§ 2.

Einfache Beispiele zur Methode der Substitution.

Integration der Potenz.

1. Häufig kann man das Integral $\int f(x)\,dx$, dessen Wert bestimmt werden soll, durch Einführung einer neuen Veränderlichen z vermöge einer Substitution von der Form $x = \varphi(z)$ auf ein bekanntes Integral zurückführen. Durch diese Substitution, aus der $dx = \varphi'(z)\,dz$ folgt, erhält man

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz\,.$$

Dabei wird vorläufig vorausgesetzt, daß die Funktion $\varphi(z)$ eine eindeutige Funktion von z ist und die Umkehrung $z = \psi(x)$ eine eindeutige Funktion von x.

Die Anwendung dieser *Methode der Substitution* hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn das zu dem Differential $f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$ gehörige Integral bekannt ist oder wenn dieses Differential eine einfachere Gestalt als $f(x)\,dx$ hat. Sehr oft erfolgt die Anwendung dieser Substitutionsmethode derart, daß $f(x)$ die Veränderliche x nur in einer Verbindung wie ax oder $ax + b$ enthält; durch die Substitution $ax = z$, bzw. $ax + b = z$, $dx = \frac{1}{a}\,dz$ ergibt sich ein einfacher gebauter Integrand.

2. Wird das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ durch die Substitution $x = \varphi(z)$ in ein anderes übergeführt, bei dem z die Integrationsveränderliche ist, so treten bei dem neuen Integral an Stelle der ursprünglichen Grenzen $x = a$ und $x = b$ neue Grenzen $z = \alpha$, $z = \beta$, die aus $a = \varphi(z)$ bzw. $b = \varphi(z)$ zu bestimmen sind. Wie schon erwähnt wurde, wird vorläufig die Eindeutigkeit dieser Auflösungen vorausgesetzt. Auch wird angenommen, daß der Integrand im Integrationsbereich nicht unstetig wird.

---

1) Technische Thermodynamik, 3. Aufl., Bd. 1, Leipzig 1905, S. 150—152.

Beispiele.

1. $\int (ax+b)^5 dx, \quad ax+b=z, \quad dx=\frac{1}{a}\,dz,$ daher

$$\int (ax+b)^5 dx = \frac{1}{a}\int z^5 dz = \frac{1}{6a}z^6 = \frac{1}{6a}(ax+b)^6.$$

2. $$\int \sqrt{4x-3}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-3)^3}.$$

3. $$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}, \quad \text{falls } n \neq -1 \text{ ist.}$$

4. $$\int (ax+b)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^2\sqrt{ax+b}.$$

5. $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, \quad \text{falls } n \neq 1 \text{ ist.}$$

6. $$\int \frac{dx}{x-k} = \ln(x-k), \quad \text{daher}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-k} = \ln\frac{b-k}{a-k}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß entweder $a<k$ und $b<k$ oder $a>k$ und $b>k$ sei.

7. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}.$$

8. Mit Hilfe der Substitution $f(x)=z$ beweise man die wichtigen Formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) \quad \text{und} \quad \int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f^2(x).$$

Die erste dieser beiden Formeln gilt nur, wenn $f(x)$ in dem Integrationsbereiche positiv ist. Bei negativem $f(x)$ ist die Formel durch

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln[-f(x)]$$

zu ersetzen (vgl. Regel **7**, S. 3).

9. $$\int \frac{11x^3}{8+5x^4}\,dx = \frac{11}{20}\int \frac{20x^3}{8+5x^4}\,dx = \frac{11}{20}\ln(8+5x^4),$$

wie aus Aufg. 8 folgt.

10. $$\int_0^a \frac{x^{n-1}}{a^n + x^n}\, dx, \quad \text{wo } n > 0 \text{ sei.}$$

$$J\,^{1)} = \frac{1}{n}\Big[\ln(a^n + x^n)\Big]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{n}\ln 2, \text{ also von } a \text{ unabhängig.}$$

11. $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt[n]{f(x)}}\, dx.$$

$$f(x) = z, \quad J = \int z^{-\frac{1}{n}}\, dz = \frac{n}{n-1}\, z^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}.$$

12. $$\int \sqrt[n]{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{f(x)^{n+1}}.$$

13. Ein materieller Punkt von der Masse m befindet sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle O im Abstand a vom Mittelpunkt M der ruhend gedachten Erde und hat die nach M gerichtete Geschwindigkeit v_0. Wie groß ist die Geschwindigkeit v_1 des Punktes, wenn er von O aus infolge der Anziehungskraft der Erde die Strecke s_1 durchlaufen hat und mit welcher Geschwindigkeit trifft er insbesondere die Erdoberfläche? Die *Änderung*, die *die Beschleunigung des Punktes* bei der Änderung seines Abstandes vom Mittelpunkt der Erde erfährt, *ist zu berücksichtigen*, jedoch werde angenommen, daß die Bewegung im luftleeren Raume erfolgt. Auch der Fall $a = \infty$ soll betrachtet werden. Vgl. auch Aufg. 32, S. 13 und Aufg. 12, S. 185 ff.

O
s
P
M

Fig. 29.

In der Mechanik wird gezeigt, daß die Beschleunigungen g und g_1, die ein und derselbe materielle Punkt in den Abständen R und a vom Mittelpunkt der als Kugel gedachten Erde erfährt, den Quadraten dieser Abstände umgekehrt proportional sind; es ist also

$$g : g_1 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{a^2} = a^2 : R^2.$$

Bedeutet R die Länge des Radius der Erdkugel, so ist die zugehörige Beschleunigung $g = 9{,}81$ m/sek².

Nach Verlauf der Zeit t möge der Punkt von O aus die Strecke $OP = s$ (Fig. 29) durchlaufen haben; die zugehörige Beschleunigung ist alsdann

(1) $$p = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g R^2}{(a-s)^2},$$

woraus bei Einführung der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ die Gleichung

(2) $$\frac{dv}{dt} = \frac{g R^2}{(a-s)^2}$$

hervorgeht.

1) Der Kürze halber wird das zu berechnende Integral im folgenden häufig durch J bezeichnet.

Nun ist

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

daher erhält man

$$v\,dv = \frac{gR^2\,ds}{(a-s)^2}$$

und

$$(3) \qquad \int_{v_0}^{v_1} v\,dv = gR^2 \int_0^{s_1} \frac{ds}{(a-s)^2},$$

woraus mit Hilfe der Substitution $a - s = z$ nach Regel **2**, S. 49 die Gleichung

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = gR^2 \cdot (-1) \int_a^{a-s_1} \frac{dz}{z^2}$$

oder

$$(4) \qquad \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = gR^2 \left[\frac{1}{z}\right]_a^{a-s_1} = gR^2 \left\{\frac{1}{a-s_1} - \frac{1}{a}\right\} = \frac{gR^2 s_1}{a(a-s_1)}$$

folgt. Daher wird

$$(5) \qquad v_1^2 = v_0^2 + \frac{2gR^2 s_1}{a(a-s_1)}.$$

Für $s_1 = a - R$ ergibt sich die Geschwindigkeit V, mit der der Punkt die Erdoberfläche trifft, nämlich

$$(6) \qquad V = +\sqrt{v_0^2 + \frac{2gR(a-R)}{a}}.$$

Die Geschwindigkeit eines aus unendlich großer Entfernung ($a = \infty$) die Erdoberfläche treffenden materiellen Punktes wird

$$(7) \qquad V_\infty = +\sqrt{v_0^2 + 2gR}.$$

Für $R = 6\,370\,300$ m [1]), $g = 9{,}81$ m/sek^2, wird $\sqrt{2gR} = 11\,180$ m/sek.

So groß würde die Geschwindigkeit eines aus unendlich großer Entfernung die Erde treffenden Körpers sein, dessen Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ war.

14. Bis zu welcher Höhe steigt ein materieller Punkt von der Masse m, der zur Zeit $t = 0$ von der Oberfläche der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal in die Höhe geschleudert wird? Wie

1) Nach F. W. Bessel hat die halbe große Achse der als abgeplattetes Rotationsellipsoid (Sphaeroid) betrachteten Erde die Länge 6377397,16 m, die halbe kleine Achse die Länge 6356078,96 m. Bei Näherungsrechnungen ersetzt man das Ellipsoid durch eine Kugel und nimmt nach F. R. Helmert (Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Bd. 1, Leipzig 1880, S. 68) am zweckmäßigsten $R = 6370300$ m als ihren Radius.

bei Aufg. 13 soll die Änderung der Beschleunigung der Schwere, nicht aber der Luftwiderstand berücksichtigt werden.

Zur Zeit t befinde sich der Punkt an der Stelle P im Abstand $MP = z$ vom Mittelpunkt der Erde. Die Beschleunigung, die die Bewegung des Punktes durch die Anziehung der Erde erfährt, ist nun negativ in Ansatz zu bringen, denn sie wirkt entgegengesetzt der Richtung der wachsenden Größe z und beträgt (vgl. Aufg. 13)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{z^2}, \tag{8}$$

woraus wie in Aufg. 13 die Gleichung

$$v\,dv = -\frac{gR^2}{z^2}\,dz$$

hervorgeht, durch deren Integration man

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = gR^2\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) \tag{9}$$

erhält, wobei die Werte $v = v_1$ und $z = z_1$ zusammengehören.

Der materielle Punkt steigt, bis v_1 zu Null geworden ist; sein Abstand Z_1 vom Mittelpunkt der Erde beträgt alsdann

$$Z_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}, \tag{10}$$

die durchlaufene Höhe ist

$$Z_1 - R = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \tag{11}$$

Diese Gleichung zeigt, daß sich der materielle Punkt ins Unendliche entfernt, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \geqq \sqrt{2gR}$ ist; hierzu müßte v_0 wenigstens 11180 m/sek betragen. Übrigens sei daran erinnert, daß der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt wurde.

15. Eine ebene Fläche, die durch die eine Achse $2b$ einer Ellipse und die zugehörige halbe Peripherie der Ellipse begrenzt ist, wird vertikal in eine Flüssigkeit eingetaucht, so daß die Achse im Flüssigkeitsspiegel liegt. Wie groß ist der auf jede Seite der Fläche ausgeübte Druck p, wenn die Länge der senkrechten Halbachse der Ellipse gleich a, das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit gleich γ ist?

Fig. 30.

Denkt man sich die Achse $2b$ der Ellipse in der wagrechten y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die Halbachse a in der vertikalen x-Achse gelegen, deren positive Richtung sich nach unten erstreckt (Fig. 30), so ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse. Zwei in den Tiefen x und $x + dx$ gezogene wagrechte Geraden begrenzen auf der eingetauchten Fläche einen Streifen, dessen Flächeninhalt

$$2y\,dx = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

ist. Nach den Bemerkungen in Aufg. 34, S. 18 stellt daher

$$dp = \frac{2b\gamma x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

den auf diesen Streifen ausgeübten Druck dar, und für den gesamten Druck erhält man

$$p = \frac{2b\gamma}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $z = +\sqrt{a^2 - x^2}$ oder $z^2 = a^2 - x^2$ verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$p = -\frac{2b\gamma}{a}\int_a^0 z^2\,dz = \frac{2b\gamma}{a}\int_0^a z^2\,dz = \frac{2}{3}\,a^2 b\gamma\,.$$

Wird statt der halben Ellipse ein Halbkreis eingetaucht (Radius a), so erhält man $p = \frac{2}{3}a^3\gamma$.

Der Druck ergibt sich in Kilogrammen, wenn die Längen a und b in Dezimetern angegeben sind und das Gewicht γ in kg/cdm gemessen ist.

16. Wenn ein Gefäß, dessen Wand die Gestalt einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse oder eines beliebigen vertikalen Zylinders oder Prismas hat, bis zu einer gewissen Höhe h mit Flüssigkeit, etwa mit Wasser, gefüllt ist, so kann man theoretisch leicht einen Ausdruck für die Geschwindigkeit angeben, mit der der Wasserspiegel in irgend einem Augenblick sinkt, wenn das Wasser durch eine im Boden des Gefäßes befindliche Öffnung ausfließt. Auch kann man theoretisch die Zeit bestimmen, die verfließt, bis das Wasser bis zu einer gewissen Höhe gesunken oder ganz ausgeflossen ist. Es werde hierbei zunächst angenommen, daß während des ganzen Vorganges keine weitere Flüssigkeit dem Gefäß zufließt; ferner wird vorausgesetzt, daß der Druck der Luft auf den Wasserspiegel so groß ist wie der Druck auf die Bodenöffnung.

Offenbar ist die während eines Zeitelements dt mit einer Geschwindigkeit v_1 durch die Bodenöffnung vom Querschnitt f ausfließende Wassermenge dQ gleich $fv_1\,dt$. Hierbei sinkt der Wasserspiegel, der einen während des Zeitelements dt als unveränderlich zu betrachtenden Flächeninhalt F haben möge, mit einer gewissen Geschwindigkeit v um die Strecke $v\,dt$, und das Volumen der im Gefäß befindlichen Wasser-

menge nimmt unterdessen um den Betrag $F \cdot v dt$ ab. Mit Rücksicht auf die Kontinuität des ganzen Vorganges muß daher

$$(1) \qquad dQ = f v_1 dt = F v dt, \quad \text{also} \quad f v_1 = F v$$

sein.

Die Geschwindigkeit v_1, mit der das Wasser in einem gewissen Augenblick t durch die Öffnung f ausfließt, ist nach einem von E. Torricelli[1]) im Jahre 1644 ausgesprochenen Satze gerade so groß wie die Geschwindigkeit eines Körpers, der in freiem Fall die der Zeit t zugehörige Druckhöhe (Abstand des Flüssigkeitsspiegels von der Bodenöffnung) zurückgelegt hat.

Fig. 31.

Wir führen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und zwar liege seine y-Achse in beliebiger Richtung in derjenigen wagrechten Ebene, in der sich zu Anfang des Vorganges (zur Zeit $t = 0$) der Wasserspiegel befindet; die positive Richtung der mit der Achse der Rotationsfläche zusammenfallenden x-Achse erstrecke sich senkrecht nach unten. Alsdann folgt für die Geschwindigkeit v_1, mit der das Wasser zur Zeit t durch die Bodenöffnung fließt, nach dem Satze von Torricelli:

$$(2) \qquad v_1 = +\sqrt{2g(h-x)},$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere, h die ursprüngliche Druckhöhe (zur Zeit $t = 0$) und x die Strecke bezeichnet, um die der Wasserspiegel während der Zeit t gesunken ist. Mit Rücksicht auf (1) erhält man für die Geschwindigkeit v, mit der der Wasserspiegel zur Zeit t sinkt:

$$(3) \qquad v = +\frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)}\cdot$$

Man erhält v in cm/sek, wenn f und F in qcm, h und x in cm gegeben sind; für g ist 981 cm/sek² einzusetzen.

Hat das Gefäß die Gestalt eines vertikalen Zylinders oder Prismas, so ist F konstant; hat das Gefäß die Gestalt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht (Fig. 31), so ist $F = y^2\pi$.

In (3) kann v durch $\frac{dx}{dt}$ ersetzt werden; daher folgt:

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = +\frac{f}{F}\sqrt{2g(h-x)}$$

und

$$(5) \qquad dt = \frac{1}{f\sqrt{2g}}\,\frac{F dx}{\sqrt{h-x}}\cdot$$

Die Anwendung des Satzes von Torricelli setzt voraus, daß sich die Begrenzung der Bodenöffnung vermöge eines Mundstückes stetig,

1) De motu gravium naturaliter descendentium, in den Opera geometrica.

also ohne scharfe Kanten an den Boden anschließt, das Verhältnis $f:F$ sehr klein ist und auch die Weite des Mundstückes verglichen mit der Druckhöhe klein ist. Die Tatsache, daß diese Voraussetzungen nie strenge erfüllt sind, sowie andere Umstände, z. B. Reibungen innerhalb der Flüssigkeit, an der Wand des Gefäßes und an der Mündung haben zur Folge, daß die durch (2) bestimmte *theoretische* Ausflußgeschwindigkeit größer ist als die wirkliche w; gewöhnlich setzt man

$$(6) \qquad w = +\,\varphi \cdot \sqrt{2g(h-x)},$$

wo der *Geschwindigkeitskoeffizient* φ das Verhältnis der wirklichen zur theoretischen Ausflußgeschwindigkeit, also einen echten Bruch, bezeichnet. Ein Mittelwert von φ ist 0,97.

Bei allen Untersuchungen, in denen die Ausflußmenge vorkommt, ist außerdem die Einschnürung zu berücksichtigen, die der austretende Flüssigkeitsstrahl in der Nähe der Bodenöffnung zeigt. Diese Einschnürung entsteht dadurch, daß die Flüssigkeitsteilchen in konvergenten Richtungen nach der Öffnung eilen und die gerade über ihr befindlichen Teilchen am Ausfluß hindern. Das Größenverhältnis des Querschnitts f_1 an der engsten Stelle des Strahles zu dem Querschnitt der Öffnung f wird *Kontraktionskoeffizient* genannt und soll mit $\varkappa$ bezeichnet werden.[1]) Die für die Zeiteinheit berechnete Ausflußmenge wird daher $\varphi\varkappa f v_1$ oder $\mu f v_1$, wenn man $\varphi\varkappa = \mu$ setzt, wo nun μ den sogenannten *Ausflußkoeffizienten* darstellt. Je nach der Gestalt der Öffnung oder des angesetzten Mundstückes hat μ verschiedene Werte, die zwischen 0,6 und 0,97 liegen.[2])

Mit Benutzung von (5) löse man die Aufgabe:

Wieviel Sekunden dauert es, bis der Wasserspiegel in einem ursprünglich bis zur Höhe h cm mit Wasser gefüllten zylindrischen oder prismatischen Gefäß infolge Ausflusses aus einer im Boden befindlichen Öffnung vom Querschnitt f qcm um x_1 cm gesunken ist und wie lange dauert es, bis das Gefäß leer ist? Der Flächeninhalt des Wasserspiegels betrage F qcm; g ist 981 cm/sek².

Die zunächst gesuchte Sekundenzahl t_1 wird

$$t_1 = \frac{F}{f\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{h-x}} = -\frac{2F}{f\sqrt{2g}} \left[\sqrt{h-x}\right]_0^{x_1}$$

---

1) H. Lamb zeigte, daß der Kontraktionskoeffizient nicht unter 0,5 sinken kann, wenn man eine reibungslose Flüssigkeit voraussetzt. Vgl. H. Lamb, Einleitung in die Hydrodynamik, deutsche Ausgabe von R. Reiff, Freiburg i. B. und Tübingen 1884, S. 39—41.

2) Näheres hierüber findet man z. B. in „Des Ingenieurs Taschenbuch" hrsgg. vom akad. Verein „Hütte", 21. Aufl., Bd. 1, Berlin 1911, S. 277—281, oder bei J. Weisbach, Lehrbuch der theoretischen Mechanik, 5. Aufl., Braunschweig 1870, S. 968—999.

oder

$$t_1 = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h - x_1})$$

und mit Benutzung des Ausflußkoeffizienten μ

$$t_1 = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h - x_1}).$$

Die Zeitdauer der Entleerung des Gefäßes beträgt

$$T_1 = \frac{2F\sqrt{h}}{\mu f\sqrt{2g}} = \frac{2Fh}{\mu f\sqrt{2gh}}.$$

Würde durch entsprechenden Wasserzufluß die Druckhöhe h konstant erhalten, so wäre die Zeitdauer T des Ausfließens einer mit dem Volumen Fh des Gefäßes inhaltsgleichen Wassermenge gegeben durch

$$T = \int_0^h \frac{F\,dx}{\mu f\sqrt{2gh}} = \frac{Fh}{\mu f\sqrt{2gh}},$$

T ist also gleich $\frac{1}{2}T_1$.

17. Wie gestaltet sich das Ergebnis von Aufg. 16, wenn in der Sekunde von oben eine Flüssigkeitsmenge Q_1 zufließt?

Jetzt ist die während des Zeitelements dt stattfindende Abnahme des Volumens der Flüssigkeit im Gefäß $F\,dx = dQ - Q_1\,dt$; da ferner dQ nach (1) in Aufg. 16 gleich $fv_1\,dt = f\sqrt{2g(h-x)}\,dt$ ist, erhält man

$$F\,dx = f\sqrt{2g(h-x)}\,dt - Q_1\,dt \quad \text{und} \quad dt = \frac{F\,dx}{f\sqrt{2g(h-x)} - Q_1},$$

somit bei Einführung des Ausflußkoeffizienten μ:

$$t_1 = F\int_0^{x_1} \frac{dx}{\mu f\sqrt{2g(h-x)} - Q_1},$$

woraus mit Benutzung der Substitution $Q_1 = f\sqrt{2gk}$ und mit Hilfe von $z = +\mu\sqrt{h-x}$, $z^2 = \mu^2(h-x)$ die Gleichung

$$t_1 = \frac{-2F}{\mu^2 f\sqrt{2g}} \int_{+\mu\sqrt{h}}^{+\mu\sqrt{h-x_1}} \frac{z\,dz}{z - \sqrt{k}} = \frac{+2F}{\mu^2 f\sqrt{2g}} \int_{+\mu\sqrt{h-x_1}}^{+\mu\sqrt{h}} \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{z - \sqrt{k}}\right) dz$$

hervorgeht. So ergibt sich

$$t_1 = \frac{2F}{\mu^2 f\sqrt{2g}}\left\{\mu\sqrt{h} - \mu\sqrt{h - x_1} + \sqrt{k}\ln\frac{\mu\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\mu\sqrt{h - x_1} - \sqrt{k}}\right\}.$$

Der Wasserspiegel sinkt solange $Q_1 < \mu f\sqrt{2g(h-x)}$ ist.

18. Wie groß ist die Zeitdauer T_1 der Entleerung einer mit Wasser gefüllten, den Scheitel nach unten kehrenden Halbkugel, wenn das Wasser durch eine im Scheitel befindliche Öffnung bei wagrechter Lage der die Halbkugel begrenzenden Ebene ausfließen soll? Der Kugelradius sei a.

Fig. 32.

Die Gleichung des die Kugel durch Drehung um die x-Achse erzeugenden Kreises ist

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

daher wird (Fig. 32) $F = y^2 \pi$ und nach (5):

$$T_1 = \frac{\pi}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a - x}}\, dx.$$

Nach Einführung von $a - x = z$, $dx = -dz$ erhält man

$$T_1 = \frac{-\pi}{\mu f \sqrt{2g}} \int_a^0 \frac{a^2 - (a-z)^2}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{\pi}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^a \frac{2az - z^2}{z^{\frac{1}{2}}}\, dz$$

$$= \frac{\pi}{\mu f \sqrt{2g}} \left[\frac{4}{3} a z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \right]_{z=0}^{z=a} = \frac{14}{15} \frac{a^2 \pi \sqrt{a}}{\mu f \sqrt{2g}}.$$

19. Ein Gefäß habe die Gestalt eines Rotationsparaboloids, das durch Drehung einer Parabel um ihre vertikal stehende Achse gebildet wird. Das Gefäß ist ursprünglich bis zu einer Höhe von 4 dm mit Wasser gefüllt, das durch eine im Scheitel des Paraboloids angebrachte Öffnung von 1 qcm Querschnitt ausfließen kann; der Parameter der Parabel sei gleich 3 dm. Man soll die Zeitdauer T_1 der Entleerung des Gefäßes bestimmen, wenn $\mu = 0{,}97$ gesetzt wird.

Die Gleichung einer Meridiankurve des Rotationsparaboloids ist bei Benutzung des S. 55 erwähnten Koordinatensystems $y^2 = 3(4 - x)$, wenn 1 dm als Längeneinheit zugrunde gelegt wird. Ferner ist alsdann $f = 0{,}01$ qdm, $g = 98{,}1$ dm/sek², daher

$$T_1 = \frac{1}{0{,}97 \cdot 0{,}01 \sqrt{196{,}2}} \int_0^4 \frac{3\pi(4 - x)\, dx}{\sqrt{4 - x}} = \frac{2\pi}{0{,}0097 \sqrt{196{,}2}} \left[(4 - x)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=4}^{x=0}$$

oder

$$T_1 = \frac{2\pi \cdot 8}{0{,}0097 \sqrt{196{,}2}} = 370 \text{ Sek.} = 6 \text{ Min., } 10 \text{ Sek.}$$

20. Im Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes von der Gestalt eines geraden Zylinders oder Prismas befinde sich eine durch einen Schieber verschließbare Öffnung von der Gestalt eines Rechtecks, dessen

Seiten die Längen a und b haben. Der Ausfluß des Wassers möge dadurch herbeigeführt werden, daß der Schieber mit gleichförmiger Geschwindigkeit c längs der beiden Seiten von der Länge b weggezogen wird; die zur vollständigen Öffnung des Rechtecks nötige Zeit betrage t_1 Sekunden, so daß $b = ct_1$ ist. Um welchen Betrag x_1 sinkt der Wasserspiegel während dieser Zeit, wenn h die ursprüngliche Druckhöhe und F der Flächeninhalt des Wasserspiegels ist?[1])

Nach (4) S. 55 ist

$$F\frac{dx}{dt} = \mu act\sqrt{2g(h-x)},$$

denn $t < t_1$ Sekunden, nachdem man begonnen hat, den Schieber wegzuziehen, ist die Bodenöffnung f ein Rechteck mit den Seiten a und ct. Es folgt nun

$$F\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{h-x}} = \mu ac\sqrt{2g}\int_0^{t_1} t\,dt,$$

wo $t_1 = b : c$ ist; daher wird

$$2F(\sqrt{h}-\sqrt{h-x_1}) = \frac{\mu ac\sqrt{2g}}{2}t_1^{\,2} = \frac{\mu abt_1\sqrt{2g}}{2},$$

oder

$$4F\sqrt{h-x_1} = 4F\sqrt{h} - \mu abt_1\sqrt{2g}$$

und

$$x_1 = h - \left(\sqrt{h} - \frac{\mu abt_1\sqrt{2g}}{4F}\right)^2 = \frac{\mu abt_1\sqrt{2g}}{2F}\left(\sqrt{h} - \frac{\mu abt_1\sqrt{2g}}{8F}\right).$$

21. In der vertikalen dünnen Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes von der Gestalt eines Prismas befindet sich eine rechteckige Öffnung, deren wagrechte Ränder vom Wasserspiegel um die Strecken h und $H > h$ entfernt sind; die Breite des Rechtecks sei b. Wie groß ist die in einer Sekunde durch die Öffnung fließende Wassermenge Q, wenn der Wasserspiegel durch entsprechenden Zufluß in konstanter Höhe erhalten wird?

Wird das Rechteck in wagrechte Streifen vom Inhalt $b\,dx$ zerlegt, so fließt durch einen solchen Streifen, der sich in der Tiefe x unter der Oberfläche befindet, in einer Sekunde die Wassermenge $dQ = \mu b\sqrt{2gx}\,dx$; daher ist die in einer Sekunde durch das ganze Rechteck fließende Wassermenge

$$Q = \mu b\sqrt{2g}\int_h^H x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right).$$

1) Vgl. D. Ch. L. Lehmann, 300 Aufgaben aus der höhern und angewandten Mathematik, Berlin 1842, S. 119.

Wenn $h = 0$ ist, beginnt die rechteckige Öffnung schon in der oberen Kante der betreffenden Seitenwand und bildet einen *Wandeinschnitt oder Überfall*; es ist alsdann

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu b H \sqrt{2gH} = \tfrac{2}{3}\mu A \sqrt{2gH},$$

wo A den Flächeninhalt des Rechtecks bedeutet.

Die praktische Anwendung dieser Formel ist hauptsächlich durch die Kenntnis des Faktors μ bedingt.[1]) Wir erwähnen nur, daß μ bei scharfen Kanten der Öffnung kleiner ist als bei abgerundeten Kanten. Die Zahl 0,41 ist ein Mittelwert von $\frac{2}{3}\mu$.

§ 3.

Uneigentliche Integrale.

Dies sind bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, bei denen entweder eine der beiden Grenzen a, b unendlich groß ist, oder bei denen die Funktion $f(x)$ für einen innerhalb des Integrationsbereiches gelegenen Wert $x = m$ unendlich groß wird. Hier gelten folgende Regeln:

1. Die Funktion $f(x)$ sei in dem Integrationsgebiete eindeutig, endlich und stetig, aber eine der beiden Integrationsgrenzen sei unendlich groß, oder die eine sei $+\infty$, die andere $-\infty$. Alsdann gilt die Definition:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß das Differential $f(x)\,dx$ bis zu jeder Grenze $b > a$ integrierbar ist und das Integral für $\lim b = \infty$ wirklich einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Man kann dies auch so fassen: Es besteht die Gleichung

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=\infty},$$

falls die Funktion $F(x)$ für $x \geqq a$ die Ableitung $f(x)$ hat und der Grenzwert $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$ existiert.

Unter den analogen Voraussetzungen ist

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a=-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

---

1) Vgl. hierzu Ph. Forchheimer, Hydraulik, in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. IV Mechanik, 3. Teil, Leipzig 1901—1908, S. 409ff.

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

für $\lim b = +\infty$ und $\lim a = -\infty$.

Der Grenzwert muß hierbei unabhängig sein von der Art, wie a und b nach ∞ bzw. $-\infty$ konvergieren, insbesondere kann man erst b nach $+\infty$ und dann a nach $-\infty$ streben lassen, oder umgekehrt.

2. Wird die Funktion $f(x)$ für eine der beiden Integrationsgrenzen oder für beide Grenzen unendlich groß, so kann dennoch das Integral einen endlichen Wert haben. Wird z. B. $f(b) = \pm\infty$ und ist ε eine beliebig kleine positive Größe, so definiert man das Integral folgendermaßen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Wird $f(a) = \pm\infty$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon=0} F(a+\varepsilon).$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß $F(x)$ für $a \leqq x < b$ bzw. für $a < x \leqq b$ die Ableitung $f(x)$ hat und die Grenzwerte $\lim\limits_{\varepsilon=0} F(b-\varepsilon)$ und $\lim\limits_{\varepsilon=0} F(a+\varepsilon)$ existieren.

3. Wird die Funktion $f(x)$ für einen zwischen a und b gelegenen Wert $x = m$ unendlich groß, so definiert man das Integral durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_a^{m-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{m+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

wo δ und ε beliebig kleine positive Größen bezeichnen.

Man erhält keinen bestimmten Wert, falls die beiden Integrale der rechten Seite keinen Grenzwert haben; es kann aber eintreten, daß für $\varepsilon = \varphi(\delta)$, wo $\varphi(\delta)$ eine eindeutige, stetige und mit δ nach Null konvergierende Funktion ist, die Summe der beiden Integrale einen im allgemeinen von der Wahl der Funktion $\varphi(\delta)$ abhängigen Grenzwert hat. Insbesondere heißt der für $\varepsilon = \delta$ auftretende Grenzwert nach A. Cauchy der *Hauptwert*[1]) des vorgelegten Integrals (vgl. Aufg. 9 u. 10, S. 63 f.). Integrale, die in der eben beschriebenen Art unbestimmt sind, werden nach Cauchy als *singulär*[1]) bezeichnet. Auch bei den in Regel **1** be-

1) Journal de l'École Polytechnique Bd. 12 (cah. 19), Paris 1823, S. 572—573; Œuvres, Bd. 1 der 2. Serie, Paris 1905, S. 335—336; Mémoires présentés par divers savants à l'académie royale des sciences Bd. 1, Paris 1827, S. 687 [1814]; Œuvres, Bd. 1 der 1. Serie, Paris 1882, S. 402.

trachteten Integralen mit den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ können solche Unbestimmtheiten auftreten.

Beispiele.

1. Den Flächeninhalt F der Kurve $y=\frac{1}{x^2}$ für das Intervall von $x=a$ bis $x=\infty$ zu bestimmen; hierbei sei a eine positive Größe.

$$F=\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{x=\infty} = \frac{1}{a}\,.$$

2. Die gleiche Aufgabe für die gleichseitige Hyperbel $y=\frac{1}{x}\cdot$

Hier wird $F=\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_a^\infty$ unendlich groß, das Integral hat keinen endlichen Grenzwert.

3. Für welche Werte von n hat $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, wo $a>0$ und $n \neq 1$ sei, einen endlichen Grenzwert?

$$J=\left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_a^\infty = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_{x=\infty} - \frac{a^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}\,.$$

Man erkennt, daß $n>1$ sein muß.

4. $$\int_4^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{12}\,.$$

5. $$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \infty\,.$$

6. Man bestimme den Flächeninhalt F der Kurve $xy^2=k^2$ für das Intervall von $x=0$ bis $x=b$.

$F=\int_0^b \frac{k}{\sqrt{x}}\,dx.$ Hier wird der Integrand für die untere Grenze unendlich groß; nach Regel **2**, S. 61, ist daher

$$J=\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^b \frac{k}{\sqrt{x}}\,dx = 2k\left(\sqrt{b}-\lim_{\varepsilon=0}\sqrt{\varepsilon}\right) = 2k\sqrt{b}\,.$$

7. Wie groß ist der Flächeninhalt F der Kurve $x^2y^3=k^3$ für das Intervall von $x=-a$ bis $x=b$, wo a und b positive Größen sind?

Nach Regel **3**, S. 61 ist

$$F = \lim_{\delta=0}\int_{-a}^{-\delta}\frac{k}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{k}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$= 3k\{\lim_{\delta=0}\sqrt[3]{-\delta} - \sqrt[3]{-a} + \sqrt[3]{b} - \lim_{\varepsilon=0}\sqrt[3]{\varepsilon}\} = 3k(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

8. Für welche positiven Werte von n hat $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, wo $b > a$ und $n \neq 1$ sei, einen *endlichen* Grenzwert?

Hier wird

$$J = \lim_{\varepsilon=0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{n-1}\left\{\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-a)^{n-1}}\right\}.$$

Man erkennt, daß $n < 1$ sein muß, und zwar wird alsdann

$$J = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(b-a)^{n-1}}.$$

9. Warum hat $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ keinen bestimmten Wert?

Da der Integrand im Integrationsbereich unendlich groß wird, hat man Regel **3**, S. 61 anzuwenden. Hiernach ist bei Anwendung von Regel **7**, S. 2f. und mit Berücksichtigung des Umstandes, daß in dem ersten der beiden folgenden Integrale x negativ ist:

$$J = \lim_{\delta=0}\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta=0}\ln\delta - \ln 1 + \ln 1 - \lim_{\varepsilon=0}\ln\varepsilon$$

oder $J = \lim_{\delta=0}\ln\delta - \lim_{\varepsilon=0}\ln\varepsilon$, und dieser Ausdruck ist unbestimmt, denn δ und ε müssen voneinander unabhängig nach Null streben, das vorgelegte Integral ist singulär. Für $\varepsilon = \delta$ erhält man den Cauchyschen Hauptwert des Integrals, nämlich Null.

10. Man zeige, daß $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$ ein singuläres Integral ist.

Nach Regel **1**, S. 60f. ist

$$J = \lim_{a=\infty}\int_{-a}^{0}\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \lim_{b=\infty}\int_{0}^{b}\frac{2x\,dx}{x^2+1} = -\lim_{a=\infty}\ln(a^2+1) + \lim_{b=\infty}\ln(b^2+1),$$

ein unbestimmter Ausdruck. Für $b = a$ erhält man den Hauptwert $\lim_{a=\infty} \ln \frac{a^2+1}{a^2+1}$, der gleich Null ist, denn $\frac{a^2+1}{a^2+1}$ wird auch für ein unendlich großes a der Einheit gleich. Vgl. Teil I, Fig. 84, S. 187.

11. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(ax+b)^n}, \text{ wo } a > 0,\ b > 0 \text{ und } n > 1 \text{ sei.}$$

Die Substitution $ax + b = z$ ergibt

$$J = \frac{1}{a}\int_b^\infty \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{a(n-1)} \lim_{c=\infty}\left[\frac{1}{z^{n-1}}\right]_b^c = \frac{1}{(n-1)\,a\,b^{n-1}}.$$

§ 4.

Integration der Exponentialfunktion und des Logarithmus.

Methode der teilweisen Integration (Integration nach Faktoren).

1. Durch Umkehrung der entsprechenden Differentiationsregeln erhält man:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = \frac{a^x\ {}^b\!\log e}{{}^b\!\log a} + C$$

und

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

2. Die *Methode der teilweisen oder partiellen Integration* läßt sich durch die Formel

$$\int \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi(x) - \int \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

darstellen, oder wenn $\varphi(x) = u$, $\psi'(x)\,dx = dv$ gesetzt wird, durch die Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Die Anwendung dieser Methode setzt natürlich voraus, daß das zu dv gehörige Integral bekannt und $\int v\,du$ leichter zu bestimmen ist als das vorgelegte Integral $\int u\,dv$.

Wenn diese Methode als partielle Integration bezeichnet wird, so bildet ihre Formel doch nicht die eigentliche Umkehrung der Formel für die partielle Differentiation. Vielmehr wird diese Umkehrung in der Schreibweise von M. Brendel[1]) durch

$$\int f(u,v)\,dx = \int' f(u,v)\,dx - \int \left\{\frac{\partial}{\partial v}\int' f(u,v)\,dx\right\} dv$$

1) Mathematische Annalen Bd. 55 (1902), S. 248ff. und S. 599.

dargestellt, wo u und v Funktionen von x sind und der Akzent am Integralzeichen andeutet, daß bei der Integration v als Konstante anzusehen ist. Im Grunde findet sich diese Formel schon bei J. Bertrand[1]) und bei J. Worpitzky[2]); dieser schreibt sie in der Gestalt

$$\int f(u,x)\,dx = \int f(u,x)\,\partial x - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \int f(u,x)\,\partial x \right\} \frac{du}{dx}\,dx.$$

Für $f(u,x) = u \cdot F(x)$ geht sie in die Formel für den besonderen Fall über, der gewöhnlich als teilweise oder partielle Integration bezeichnet wird und nach dem Vorschlage von N. J. Hatzidakis[3]) besser als „Integration nach Faktoren" zu bezeichnen wäre.

Beispiele.

1. $$\int a^{x+3}\,dx = a^3 \int a^x\,dx = \frac{a^{x+3}}{\ln a}.$$

2. Wie groß ist die Fläche F der Kurve $y = a^x$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = x_1$?

Man findet

$$F = \frac{a^{x_1} - 1}{\ln a} = \frac{y_1 - 1}{\ln a} = (y_1 - 1)\,\mathrm{St},$$

wo $\mathrm{St} = 1 : \ln a$ die bei der Kurve $y = a^x$ konstante Länge der Subtangente bedeutet (vgl. Teil I, S. 67, Aufg. 5). Für $a = e$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, wird $F = y_1 - 1$.

3. $$\int a^{nx}\,dx = \frac{a^{nx}}{n \ln a}.$$

4. $$\int x e^x\,dx.$$

Setzt man $x = u$, $e^x dx = dv$, so ergibt die Methode der teilweisen Integration

$$J = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1);$$

insbesondere wird

$$\int_0^1 x e^x\,dx = 1.$$

5. $$\int x^2 e^x\,dx.$$

---

1) Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Bd. 2, Paris 1870, S. 10—11.

2) Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Berlin 1880, S. 73—74; Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 23 (1878), S. 407—408.

3) Mathematische Annalen, Bd. 57 (1903), S. 134—136.

Hier ist die Methode der teilweisen Integration zweimal anzuwenden. Man erhält

$$J = x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x.$$

6. $$\int \ln x \cdot dx.$$

Für $\ln x = u$, $dx = dv$ ergibt Regel **2**, S. 64:

$$J = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1);$$

insbesondere wird

$$\int_1^2 \ln x\, dx = 2 \ln 2 - 1.$$

7. $\int \ln x^n\, dx = n \int \ln x\, dx = nx(\ln x - 1).$

8. $\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3.$

9. $\int x^n \ln x\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}, \quad n \neq -1.$

10. $\int_0^1 x^n \ln x\, dx, \quad$ wo $n > 0$ sei.

Hier wird nach Regel **2**, S. 61:

$$J = \lim_{\varepsilon = 0} \int_\varepsilon^1 x^n \ln x\, dx = -\frac{1}{(n+1)^2} - \lim_{\varepsilon = 0} \left[\frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \varepsilon^{n+1} \right],$$

und wenn man beachtet, daß $\lim\limits_{\varepsilon = 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0$ und $n > 0$ ist, folgt

$$J = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

11. $$\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Nach der zweiten Formel in Aufg. 8, S. 50 wird $J = \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

12. $$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx, \quad \ln x = z, \quad \frac{1}{x}\, dx = dz,$$

$$J = \int \ln z\, dz = z(\ln z - 1) = \ln x \{\ln(\ln x) - 1\}$$

13. Wie groß ist der Flächeninhalt F der Kurve $y = e^{-mx}$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = +\infty$? Hierbei sei $m > 0$.

$$F = \lim_{b=\infty} \int_0^b e^{-mx}\,dx = -\frac{1}{m} \lim_{b=\infty} e^{-mb} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\cdot$$

Das Integral hat nur für $m > 0$ einen endlichen Wert; bei negativem m würde F zugleich mit der oberen Grenze unendlich groß werden.

14. Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cof}\,x$ und $\mathfrak{Sin}\,x$ sind durch die Formeln

$$\mathfrak{Cof}\,x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\,x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definiert. Unter Beachtung der Tatsache, daß die Ableitung je einer dieser beiden Funktionen die andere ergibt (vgl. Teil I, S. 7 und 8, Aufg. 6), mache man sich klar, daß

$$\int \mathfrak{Cof}\,x\,dx = \mathfrak{Sin}\,x \quad \text{und} \quad \int \mathfrak{Sin}\,x\,dx = \mathfrak{Cof}\,x$$

ist.

15. Den Flächeninhalt F der Kettenlinie

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$$

für das Intervall von x_1 bis x_2, wo $0 < x_1 < x_2$ sei, zu bestimmen.

Hier ist

$$F = m \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx = m^2 \left[\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)\right]_{x=x_1}^{x=x_2},$$

wofür mit Anwendung der Beziehung $\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$ auch

$$F = m^2 \left[\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) - 1}\,\right]_{x_1}^{x_2} = m\left[\sqrt{y^2 - m^2}\right]_{y_1}^{y_2}$$
$$= m\sqrt{{y_2}^2 - m^2} - m\sqrt{{y_1}^2 - m^2}$$

gesetzt werden kann. Dabei sind y_1, y_2 die zu den Abszissen x_1, x_2 gehörigen Ordinaten.

Man beachte, daß ein mit F inhaltsgleiches Rechteck sofort konstruiert werden kann, wenn die Kettenlinie und das Koordinatensystem gezeichnet vorliegt; denn ein mit y_1 als Radius um den Scheitel S der Kettenlinie (Fig. 33) beschriebener Kreisbogen trifft die positive x-Achse in einem Punkte L_1, so daß $OL_1 = \sqrt{{y_1}^2 - m^2}$ ist. Analog wird $OL_2 = \sqrt{{y_2}^2 - m^2}$, das Rechteck mit den Seiten $OS = m$ und $L_1 L_2$ ist daher mit der Fläche der Kettenlinie inhaltsgleich.

Fig. 33.

16. Mit Benutzung der Formeln

$$\mathfrak{Cof}\, 2x = \mathfrak{Cof}^2 x + \mathfrak{Sin}^2 x = 1 + 2\,\mathfrak{Sin}^2 x = 2\,\mathfrak{Cof}^2 x - 1$$

beweise man die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\int \mathfrak{Sin}^2 x\, dx = \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Sin}\, 2x - \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, x - x)$$

und

$$\int \mathfrak{Cof}^2 x\, dx = \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Sin}\, 2x + \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cof}\, x + x).$$

17. $$\int (\ln x)^2\, dx, \quad \ln x = z, \quad x = e^z$$

$$J = \int z^2 e^z\, dz = \{(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2\}\, x,$$

nach Aufg. 5.

Mit Hilfe der Formel in Aufg. 8, S. 50:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x)$$

sind die beiden folgenden Aufgaben zu erledigen:

18. $$\int \frac{e^x}{e^x + a}\, dx = \ln(e^x + a) + \ln c = \ln[c(e^x + a)]$$

und

19. $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}\, dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln c = \ln(c \ln x).$$

20. Man beweise die Formel

$$\int u v^{(n+1)}\, dx =$$
$$u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^n v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v\, dx,$$

die eine Verallgemeinerung für die Methode der teilweisen Integration (Regel **2**, S. 64) darstellt.

Es ist

$$\begin{aligned}
\int u v^{(n+1)}\, dx &= u v^{(n)} - \int u' v^{(n)}\, dx,\\
\int u' v^{(n)}\, dx &= u' v^{(n-1)} - \int u'' v^{(n-1)}\, dx,\\
\int u'' v^{(n-1)}\, dx &= u'' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)}\, dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\int u^{(n)} v'\, dx &= u^{(n)} v - \int u^{(n+1)} v\, dx.
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen abwechselnd mit $+1$ und -1 multipliziert und dann zueinander addiert, so folgt sofort die zu beweisende Formel.

21. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, so besteht die Formel

$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\},$$

die durch mehrfach wiederholte Anwendung der teilweisen Integration zu beweisen ist. Insbesondere folgt:

$$\int e^{-x} x^n\,dx = -e^{-x}\{x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots 3\cdot 2x + n!\}$$

$$= -n!\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\right\} e^{-x}.$$

22. Auf dieselbe Art beweist man: Ist $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, so gilt die Formel

$$\int e^{\alpha x} f(x)\,dx = e^{\alpha x}\left\{\frac{f(x)}{\alpha} - \frac{f'(x)}{\alpha^2} + \frac{f''(x)}{\alpha^3} - \cdots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right\}$$

und insbesondere

$$\int e^x x^n\,dx = (-1)^n n!\left\{1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right\} e^x.$$

Die Ergebnisse von Aufg. 21 und 22 erhält man auch sofort mit Hilfe der in Aufg. 20 bewiesenen Formel.

23. $$\int_{x_1}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx. \qquad x^2 = z, \quad x\,dx = \tfrac{1}{2}dz,$$

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{x_1^2}^{\infty} z\,e^{-z}\,dz = -\tfrac{1}{2}[z\,e^{-z} + e^{-z}]_{x_1^2}^{\infty} = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 1)e^{-x_1^2}.$$

24. Man zeige, daß

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$$

ist, falls n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Durch teilweise Integration folgt

$$J = -[x^n e^{-x}]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx.$$

Hier ist nun $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, wie leicht gezeigt werden kann (Teil I, S. 71—72, Regel **1**), daher wird

$$J = n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx,$$

woraus durch wiederholte Anwendung dieser Formel

$$J = n! \int_0^\infty e^{-x}\, dx = n!$$

hervorgeht.

25. Unter *Radioaktivität* versteht man nach Frau P. Curie die Fähigkeit gewisser Substanzen ohne Zufuhr äußerer Energie sogenannte *Becquerelstrahlen* auszusenden, d. h. unsichtbare Strahlen, die auf die photographische Platte wirken, in gewissen kristallinischen Substanzen Fluoreszenz erregen und einen elektrisch geladenen Körper entladen, indem sie das Gas, z. B. die Luft, in der sich der Körper befindet, ionisieren, d. h. zu einem Leiter der Elektrizität machen. H. Becquerel entdeckte die nach ihm genannten Strahlen bei dem Element *Uranium* und dessen Verbindungen, Frau Curie und unabhängig von ihr G. C. Schmidt fanden Strahlen mit solchen Eigenschaften auch bei *Thoriumverbindungen*, das Ehepaar Curie bei den neu entdeckten Elementen *Radium* und *Polonium*; auch das von Debierne gefundene *Aktinium* ist in diesem Zusammenhang zu nennen.[1]

Ein Maß der Radioaktivität verschiedener Substanzen ist die in Ampère anzugebende Stärke des elektrischen Stromes, der eine durch die radioaktiven Substanzen leitend gemachte Luftschicht bei übrigens gleicher Versuchsanordnung durchfließt. Die Stärke der Ströme, um die es sich hier handelt, ist äußerst gering, es kommen Stromstärken von 10^{-12} bis 10^{-5} Ampère in Betracht.[2]

Man nimmt zurzeit an, daß sich die radioaktiven Substanzen in einem Umwandlungsprozeß befinden; ein Teil dieses Prozesses besteht in der Aussendung von Strahlen verschiedener Gattung mit merkwürdigen Eigenschaften. Ein Umwandlungsprodukt des Radiums ist ein Gas, die *Radiumemanation*. Die Aktivität dieses Gases ist aber sehr unbeständig, weil sich jede radioaktive Substanz ebenso wie diese Emanation allmählich umwandelt oder zerfällt, die eine rascher, die andere langsamer. Dieser Zerfall geht derart vor sich, daß die Abnahme $-dN$ der Anzahl der Atome, die während des Zeitelements dt erfolgt, der Zahl der noch vorhandenen Atome proportional ist. Es besteht daher eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad -dN = \lambda N\, dt,$$

1) Näheres über Radioaktivität findet man z. B. in den folgenden Schriften: J. J. Thomson, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen, deutsche Ausgabe von E. Marx, Leipzig 1906; E. Rutherford, Radioaktive Umwandlungen, übersetzt von M. Levin, Braunschweig 1907 (Heft 21 der Sammlung „Die Wissenschaft"); W. Frommel, Radioaktivität, Leipzig 1907 (Nr. 317 der Sammlung Göschen); Beitrag von E. Dorn über Radioaktivität zu F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, S. 630—660; Frau P. Curie, Die Radioaktivität, deutsche Ausgabe von B. Finkelstein, Leipzig 1911.

2) Frau P. Curie a. a. O. 1. Teil, S. 75—76.

wo λ eine der betreffenden Substanz eigentümliche Konstante, die sogenannte *radioaktive Konstante* ist.

Was folgt nun aus dieser Gleichung für die Zahl N der zur Zeit t noch vorhandenen Atome, wenn deren Anzahl zur Zeit $t = 0$ gleich N_0 war?

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \quad \text{oder} \quad \ln N = -\lambda t + c,$$

und hier ist die Konstante c unter Rücksicht auf die Tatsache zu bestimmen, daß zu $t = 0$ der Wert $N = N_0$ gehört; daher wird $c = \ln N_0$ und

$$(3) \qquad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad \text{oder} \quad N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Besonders wichtig ist hier die Zeit $t = T$, während deren die Zahl der Atome auf die *Hälfte* sinkt; zu ihrer Bestimmung muß $N : N_0 = 1 : 2$ sein, daher

$$(4) \qquad \lambda T = \ln 2 \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0{,}69315}{\lambda}.$$

Man nennt T die *Halbwertszeit* oder *Zerfallperiode.* Für die Radiumemanation ist $T = 3{,}85$ Tage und $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6}$, wenn man T in Sekunden ausdrückt.

26. Es sei N_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atome einer radioaktiven Substanz; zur Zeit t sind dann nach Aufg. 25 infolge des Zerfalls nur noch $N = N_0 e^{-\lambda t}$ Atome vorhanden. Wie groß ist hiernach die *mittlere Lebensdauer* eines Atoms?

Die Anzahl der während des Zeitelements dt zerfallenden Atome ist gleich dem absoluten Werte von

$$dN = -N_0 \lambda e^{-\lambda t} dt = -\lambda N dt,$$

sie ist also $\lambda N dt$; so viele Atome haben daher während der Zeitdauer t bestanden. Zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer muß man für alle Werte t des Intervalls von $t = 0$ bis $t = \infty$ die Zahl der Atome, die während der Zeit t bestanden haben, mit t multiplizieren und die Summe dieser unendlich vielen Produkte durch die Anzahl N_0 der ursprünglich vorhandenen Atome dividieren. Bezeichnet man die mittlere Lebensdauer mit Θ, so wird demnach mit Rücksicht auf (3):

$$\Theta = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda N dt = \frac{\lambda}{N_0} \int_0^\infty t N_0 e^{-\lambda t} dt,$$

und hierfür findet man nach Aufg. 24 den Wert $1 : \lambda$.[1])

1) Vgl. S. 387—388 von Bd. 1 der vorhin genannten deutschen Ausgabe des Werkes von Frau P. Curie.

Bei der Radiumemanation war $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6}$/sek, daher ergibt sich für sie $\Theta = 10^6 : 2{,}084$ Sekunden $= 5{,}552$ Tage $= 133{,}26$ Stunden.

27. Nach der kinetischen Gastheorie sind die Moleküle eines Gases absolut elastische, durch Zwischenräume voneinander getrennte Körperchen, die sich fortwährend in geradliniger Bewegung nach den verschiedenen Richtungen des Raumes befinden, und zwar ändert ein Molekül die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit erst dann, wenn es gegen eine feste Wand stößt oder andere Moleküle trifft. Befinden sich in der Volumeinheit n Moleküle eines Gases, so ist die Anzahl derjenigen unter diesen Molekülen, deren absolute Geschwindigkeit einen zwischen u und $u + du$ gelegenen Betrag hat, nach dem „*Verteilungsgesetz von Maxwell*“[1]) durch die Formel

$$(1) \qquad dn = \frac{4n}{c^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{c^2}} \cdot u^2 du$$

gegeben, in der c eine von der Temperatur des Gases abhängige Konstante bedeutet.

Man soll nun aus (1) die mittlere Geschwindigkeit u_m der Gasmoleküle bestimmen.

Der Mittelwert aller Geschwindigkeiten ergibt sich, wenn man jede Geschwindigkeit u mit der ihr zugehörigen Anzahl dn multipliziert, alle diese Produkte addiert, d. h. über $u\,dn$ von $u = 0$ bis $u = \infty$ integriert, und dieses Integral durch die Anzahl n der Moleküle dividiert.

Man erhält

$$(2) \qquad u_m = \frac{4}{c^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^3 e^{-\frac{u^2}{c^2}} du$$

oder mit Hilfe von Aufg. 23:

$$(3) \qquad u_m = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}.$$

In einer späteren Aufgabe (§ 13, Aufg. 18) wird gezeigt, in welcher Weise die Größe c von der gesamten kinetischen Energie T' der n Moleküle abhängt.

---

1) Philosophical Magazine (4) Bd. 19 (1860), S. 22—24; The scientific papers of J. C. Maxwell, Bd. 1, Cambridge 1890, S. 380—381. Eine andere Ableitung gibt Maxwell im Philos. Magazine (4) Bd. 35 (1868), S. 186—188; The scientific Papers, Bd. 2, Cambridge 1890, S. 44—46. Vgl. auch R. Clausius, Die mechanische Wärmetheorie, 3. Bd.: Die kinetische Theorie der Gase, herausgegeb. von M. Planck und C. Pulfrich, 2. Aufl., Braunschweig 1889—1891, S. 39—40.

§ 5.

Aufgaben, die sich auf die allgemeinen Eigenschaften der bestimmten Integrale beziehen.

1. Man soll zeigen, daß das bestimmte Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{1}$$

durch die Substitution $x = x_1 + z(x_2 - x_1)$ in ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 und mit z als Integrationsveränderlicher überführbar ist.

Für $x = x_1$ wird $z = 0$, für $x = x_2$ wird $z = 1$; da ferner $dx = (x_2 - x_1)dz$ ist, folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = (x_2 - x_1)\int_0^1 f[x_1 + z(x_2 - x_1)]\,dz.$$

2. Das Integral (1) soll durch die Substitution $x = pz + q$ in ein anderes übergeführt werden, das an Stelle von x_1 und x_2 die Grenzen z_1 und z_2 hat. In welcher Weise hängen p und q von x_1, x_2, z_1 und z_2 ab?

Aus $x_1 = pz_1 + q$, $x_2 = pz_2 + q$ folgt

$$p = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}, \quad q = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1};$$

daher wird

$$x = \frac{(x_2 - x_1)z + x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Sollen insbesondere die neuen Grenzen $z_1 = -1$, $z_2 = +1$ sein, so hat man

$$x = \frac{(x_2 - x_1)z + x_1 + x_2}{2}.$$

3. Die Richtigkeit der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a + b - x)\,dx$$

mit Hilfe der Substitution $x = a + b - z$ zu beweisen.

Hier ist $dx = -dz$, daher

$$\int_a^b f(a + b - x)\,dx = -\int_b^a f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Da $\int_a^b f(z)\,dz$ ein *bestimmtes* Integral ist, sein Zahlenwert also von z völlig unabhängig ist, kann statt z gerade so gut der Buchstabe x gesetzt werden, womit alsdann die vorgelegte Gleichung bewiesen ist.

4. Mit Hilfe des Ergebnisses von Aufg. 3 mache man sich klar, daß folgende Formeln gelten:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(b-x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(-x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\cos x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\cot x)\,dx, \tag{4}$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x\,dx = 0, \tag{5}$$

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx. \tag{6}$$

5. Man beweise die Richtigkeit der Gleichung

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

genügt es zu zeigen, daß

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad \text{gleich} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin x)\,dx$$

ist. Dies ergibt sich mit Hilfe der Substitution $x = \pi - z$, denn sie führt

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad \text{in} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin z)\,dz$$

über, oder wenn man den *Buchstaben* z durch x ersetzt, in

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\sin x)\,dx.$$

6. Die Funktion $f(x)$ ist bekanntlich eine *gerade Funktion*, wenn sie der Gleichung $f(x) = f(-x)$ genügt, während für eine *ungerade Funktion* die Gleichung $f(x) = -f(-x)$ besteht (vgl. auch Teil I, S. 6). Man soll nun beweisen:

Für eine *gerade* Funktion $f(x)$ ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

für eine *ungerade* Funktion $f(x)$ ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Dies folgt mit Hilfe von

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$

Ersetzt man im zweiten Integral der rechten Seite dieser Gleichung x durch $-x$, so wird

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = \pm\int_0^a f(x)\,dx,$$

wo beim letzten Integral das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $f(x)$ eine gerade oder ungerade Funktion ist.

7. Ebenso folgt leicht die Formel

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}\,dx.$$

§ 6.

Die trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen.

Durch Umkehrung der entsprechenden Differentiationsregeln erhält man:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C',$$

$$\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \cos x + C = -\operatorname{arc} \sin x + C',$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \cot x + C'.$$

Dabei muß in den Formeln für $\int \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}$ die Veränderliche x dem Intervall von -1 bis $+1$ angehören.

Es ist ferner zu beachten, daß bei

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C'$$

die Funktion $\operatorname{arc} \sin x = y$ einen Bogen darstellt, dessen Kosinus positiv ist, denn $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\cos y}$ muß positiv sein, da die Quadratwurzel des Integranden das Pluszeichen hat. Man könnte auch sagen, daß die Funktion $\operatorname{arc} \cos x$ einen Bogen darstellt, dessen Sinus positiv ist.

Entsprechendes gilt bei $\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}$. Vgl. hierzu auch Teil I, S. 9—10.

Beispiele.

1. Welche Funktion $F(x)$ hat die Ableitung $\cos x$ und für $x = \frac{1}{6}\pi$ den Wert 3?

$$F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

wo $C = 2\frac{1}{2}$ gefunden wird.

2. Wie groß ist der Flächeninhalt F der Kurve $y = \sin x$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$?

$$F = 2.$$

3. Die in Aufg. 2 erwähnte Fläche wird durch die Gerade $y = \frac{1}{2}$ in einen oberen Teil F_1 und einen unteren Teil F_2 zerlegt (Fig. 34); wie groß sind F_1 und F_2?

Fig. 34.

Die Gerade trifft die Kurve $y = \sin x$ in Punkten mit den Abszissen $x = \frac{1}{6}\pi$ und $x = \frac{5}{6}\pi$. Verlegt man nun die x-Achse in die schneidende Gerade und bezeichnet man die neuen Ordinaten mit Y, so lautet die Gleichung der auf das neue Koordinatensystem bezogenen Kurve:

$$Y = \sin x - \tfrac{1}{2};$$

daher wird

$$F_1 = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin x - \tfrac{1}{2})\,dx = -\left[\cos x + \tfrac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} = \sqrt{3} - \tfrac{1}{3}\pi = 0{,}685.$$

Mit Rücksicht auf das Ergebnis von Aufg. 2 wird

$$F_2 = 2 - 0{,}685 = 1{,}315.$$

4. $$\int (a \sin x + b \cos x)\,dx = -a \cos x + b \sin x.$$

5. Man bestimme den Flächeninhalt der Kurve $y = b \sin \frac{x}{a}$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = a\pi$.

$$F = b \int_0^{a\pi} \sin \frac{x}{a}\,dx = -ab\left[\cos \frac{x}{a}\right]_0^{a\pi} = 2ab.$$

6. $$\int \sin 2x\,dx = -\tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

Würde man $\int \sin 2x\,dx = 2\int \sin x \cos x\,dx$ vermöge der Substitution $\sin x = z$ auf $2\int z\,dz$ zurückführen, so würde man den Wert $\sin^2 x$ erhalten. Warum sind beide Ergebnisse richtig?

7. $$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx.$$

8. $$\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{b}{\sin^2 x}\right) dx = a \operatorname{tg} x - b \cot x.$$

9. Welche Gestalt nimmt diese Formel im Falle $b = -a$ an?

$$\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} - \frac{a}{\sin^2 x}\right) dx = \frac{2a}{\sin 2x}.$$

10. Welche Gestalt nimmt die Formel 8 im Falle $b = a$ an?

$$\int \frac{a\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = a(\operatorname{tg} x - \cot x) = -2a \cot 2x.$$

11. $$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}, \quad ax + b = z, \quad dx = \frac{1}{a}\,dz,$$

$$J = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b).$$

12. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{+\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a}.$$

13. $\int_0^a \frac{dx}{+\sqrt{a^2-x^2}}$, wo $a > 0$ sei.

Hier wird der Integrand für die obere Grenze des Integrals unendlich groß; nach Regel **2**, S. 61 ist daher

$$J = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{+\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} \arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - \arcsin 0 = \frac{1}{2}\pi.$$

Unter der Annahme, daß $\arcsin \frac{x}{a}$ dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ angehört, ist hierbei $\lim_{\varepsilon=0} \arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} = \frac{1}{2}\pi$ und $\arcsin 0 = 0$.

Für ein negatives a, etwa $a = -a_1$, wo nun $a_1 > 0$ ist, wird

$$\int_0^a \frac{dx}{+\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_{-a_1}^0 \frac{dx}{+\sqrt{a_1{}^2-x^2}} = -\lim_{\varepsilon=0} \int_{-a_1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{+\sqrt{a_1{}^2-x^2}}$$

$$= -\left\{\arcsin 0 - \lim_{\varepsilon=0} \arcsin \frac{-a_1+\varepsilon}{a_1}\right\} = -\frac{1}{2}\pi.$$

14. Man zeige, daß die Formel

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

auch in der Gestalt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+c}{1-cx}$$

geschrieben werden kann, wenn man c durch die Substitution $C = \operatorname{arc\,tg} c$ einführt.

Setzt man $\operatorname{arc\,tg} x = \alpha$, $\operatorname{arc\,tg} c = \beta$, so ist $x = \operatorname{tg} \alpha$, $c = \operatorname{tg} \beta$; ferner wird

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{x+c}{1-xc},$$

somit

$$\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} c = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+c}{1-cx}.$$

Dies ist das Additionstheorem für die Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$.

15. $$\int_0^{+\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^{+\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\pi.$$

Unter der Annahme, daß $\operatorname{arc\,tg} x$ dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ angehört, ist hier $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$ und $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.

16. $$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 2x.$$

17. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\,\frac{bx}{a}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a}.$$

18. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

$$J = \lim_{b=\infty} \int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{b=\infty} \left[\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\right]_0^b = \frac{\pi}{2a}.$$

Hier wäre ähnliches zu bemerken wie bei Aufg. 15.

19. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Hier ist $J = \frac{\pi}{a}$, und es gilt entsprechendes wie bei Aufg. 15.

20. $$\int \frac{dx}{x^2-4x+8}.$$

$$J = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4}, \quad x-2 = 2z, \quad J = 2\int \frac{dz}{4(z^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-2}{2}.$$

21. $$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}, \quad x-a = bz, \quad J = b\int \frac{dz}{b^2(z^2+1)} = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-a}{b}.$$

22. $$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \qquad e^x = z, \qquad dx = \frac{1}{z}\,dz.$$

$$J = \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tg} e^x.$$

23. $$\int x \cos x\,dx.$$

$$J = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x.$$

24. $$\int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\,dx, \qquad \cos x = z,$$

$$J = \int (z^2-1) z^{\frac{1}{2}}\,dz = \tfrac{2}{7} z^{\frac{7}{2}} - \tfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = 2 \cos x \sqrt{\cos x}\left(\tfrac{1}{7}\cos^2 x - \tfrac{1}{3}\right).$$

25. $$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx, \qquad \sin x = z,$$

$$J = \int \left(z^{-\frac{2}{3}} - z^{\frac{4}{3}}\right) dz = 3 z^{\frac{1}{3}} - \tfrac{3}{7} z^{\frac{7}{3}} = 3\sqrt[3]{\sin x}\left(1 - \tfrac{1}{7}\sin^2 x\right).$$

26. Warum ist $\int_a^\infty \cos x\,dx$, wo a eine beliebige endliche Zahl sei, unbestimmt?

Die Funktion $\sin x$ hat für $x = \infty$ keinen bestimmten Grenzwert.

Unter Anwendung der in Aufg. 8, S. 50 abgeleiteten Formel für $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ erledige man Aufg. 27 bis 30:

27. $$\int \cot x\,dx.$$

$$J = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln \sin x + \ln c = \ln(c \sin x).$$

28. $$\int \operatorname{tg} x\,dx.$$

$$J = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + \ln c = \ln \frac{c}{\cos x}.$$

29. $$\int \frac{\cos x}{a + b\sin x}\,dx = \frac{1}{b}\ln(a + b\sin x).$$

30. $$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln\cos x.$$

Bei Aufg. 31 bis 33 wende man die in Aufg. 8, S. 50 abgeleitete Formel für $\int f(x) f'(x)\,dx$ an.

31. $$\int \frac{\operatorname{arc}\sin x}{+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arc}\sin x)^2.$$

32. $$\int \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)^2.$$

33. $$\int \frac{\cot x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}(\cot x)^2.$$

34. $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

$$J = \Big[\sin x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cos x\,dx\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= \Big[\sin x \operatorname{tg} x + \cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \Big[\frac{1}{\cos x}\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = +\sqrt{2} - 1.$$

35. $$\int \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\,dx.$$

$$J = x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arc}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

36. $\int \arc\sin x\,dx, \quad \arc\sin x = z, \quad x = \sin z$

$$J = \int z \cos z\,dz = z \sin z + \cos z \quad \text{(nach Aufg. 23)},$$

oder also

$$J = x \arc\sin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

37. Man soll das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4}\pi$$

nach der *Simpsonschen Regel* (vgl. S. 10) berechnen, indem man die in dieser Regel auftretende Anzahl $2n$ gleich 10 setzt.

Hier ist

$$J = \frac{h}{3}\{y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\}.$$

Es sei nun $y_\varkappa$ die zur Abszisse $x = \frac{1}{10}\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots 10$) gehörige Ordinate der Kurve $y = \frac{1}{1 + x^2}$; man hat alsdann folgende Werte:

$y_0 = 1$	$y_1 = 0{,}990099$	$y_2 = 0{,}961538$
$y_{10} = 0{,}5$	$y_3 = 0{,}917431$	$y_4 = 0{,}862069$
	$y_5 = 0{,}8$	$y_6 = 0{,}735294$
	$y_7 = 0{,}671141$	$y_8 = 0{,}609756$
	$y_9 = 0{,}552486$	
	Summe $= 3{,}931157$	Summe $= 3{,}168657$.

Daher erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = J = \frac{1}{30}\{1{,}5 + 4 \cdot 3{,}931157 + 2 \cdot 3{,}168657\} = \frac{23{,}561943}{30} = 0{,}785398,$$

somit $\pi = 3{,}141592$, während der wahre Wert auf sechs Stellen abgerundet gleich 3,141593 ist.

Wie man sieht, ist das Ergebnis sehr genau. Immerhin muß man bei Anwendung dieser und ähnlicher Regeln vorsichtig sein, denn es gibt Fälle, in denen der Fehler ziemlich groß ist. Ein solcher Fall würde z. B. vorliegen, wenn man die Fläche der oberhalb der x-Achse gelegenen Hälfte des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ nach der Simpsonschen Regel oder nach der Trapezregel bestimmen wollte[1]).

1) Vgl. G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik, 2. Aufl., Leipzig 1911, S. 249—250.

38. Man berechne den Wert des Integrals in Aufg. 37 nach der *Trapezregel*

$$J = \frac{x_n - x_0}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

(vgl. S. 11), und zwar sei $n = 10$.

Man findet

$$\frac{1}{4}\pi = J = \frac{1}{20}\{1{,}5 + 2(3{,}931157 + 3{,}168657)\} = \frac{15{,}699628}{20} = 0{,}784981,$$

somit $\pi = 3{,}139924$, mit dem wirklichen Wert verglichen um 0,001669 zu klein.

39. An dem freien Ende B_0 eines vertikal hängenden elastischen Fadens AB_0 oder eines elastischen Stabes von der Länge l wird ein Gewicht $P = mg$ angehängt. Hierdurch erleidet der Faden eine Verlängerung, bis die Gleichgewichtslage AB eintritt. Wird nun das Gewicht nach unten gezerrt und dann losgelassen, so erfolgt zunächst nochmals eine Verlängerung des Fadens, etwa bis B' (Fig. 35). Alsdann wird das Gewicht durch die Elastizität des Fadens wieder in die Höhe gehoben, und zwar über die Gleichgewichtslage AB hinaus, der Faden erfährt also eine Verkürzung der Länge, die er in der Gleichgewichtslage hatte; dann folgt wieder eine Verlängerung usf., es entstehen also Longitudinalschwingungen des Fadens. Hierbei ist nach dem Näherungsgesetz von R. Hooke (vgl. S. 27) die Kraft, mit der vermöge der Elastizität das Gewicht wieder gehoben wird, der Verlängerung des Fadens proportional. Die Gleichgewichtslage ist vorhanden, wenn die Verlängerung Δl so groß ist, daß sie dem Gewicht $P = mg$ das Gleichgewicht hält, also $mg = k\,\Delta l$ ist, wo k eine positive Proportionalitätskonstante bedeutet. Ist nun x das Stückchen, um das in irgend einem Zeitmoment t die Länge des Fadens von der Länge $l + \Delta l$ abweicht, die der Faden zur Zeit der Gleichgewichtslage hatte, so gilt, wenn x nach unten positiv gerechnet wird, nach dem Grundgesetz der Dynamik bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Gleichung

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x) = -kx.$$

Bei Einführung der Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ kann $m\frac{d^2x}{dt^2}$ durch $m\frac{dv}{dt}$ oder durch $m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$ ersetzt werden; daher folgt

$$(2) \qquad mv\frac{dv}{dx} = -kx \quad \text{oder} \quad v\frac{dv}{dx} = -\varkappa^2 x,$$

wenn $k : m = \varkappa^2$ gesetzt wird.

Man soll nun durch Integration die Beziehungen zwischen v und x, zwischen x und t, sowie zwischen v und t ableiten; $x = a$ sei die Ampli-

tude der Schwingung, also der größte Betrag, um den das Gewicht über die Gleichgewichtslage hinaus nach unten gezerrt wurde.

Zunächst wird nach (2) $v^2 = -\varkappa^2 x^2 + c$; da die Werte $v = 0$ und $x = a$ zusammengehören, wird $c = \varkappa^2 a^2$, also

$$v^2 = \varkappa^2(a^2 - x^2). \tag{3}$$

Mit Rücksicht auf $v = \frac{dx}{dt}$ erhält man

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}} = \varkappa\, dt$$

oder (nach Aufg. 12) $\pm \arcsin \frac{x}{a} = \varkappa t + c_1$, somit

$$x = \pm\, a \sin(\varkappa t + c_1) = \pm\, a(\sin \varkappa t \cos c_1 + \cos \varkappa t \sin c_1).$$

Zur Bestimmung von c_1 werde angenommen, daß $t = 0$ und $x = +a$ zusammengehören; alsdann erhält man $\pm \sin c_1 = 1$, d. h. $\sin c_1 = \pm 1$, $\cos c_1 = 0$ und

$$x = a \cos \varkappa t. \tag{4}$$

Die Beziehung zwischen v und t ergibt sich aus (4) durch Differentiation:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\, a\varkappa \sin \varkappa t. \tag{5}$$

Die Zeitdauer T der Periode, in der ein vollständiger Schwingungsvorgang verläuft, geht aus

$$\sin \varkappa t = \sin(\varkappa t + 2\pi) = \sin \varkappa(t + T)$$

hervor, sie wird also

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{6}$$

und ist unabhängig von der Amplitude a.

Die Gleichung (4) zeigt, daß der untere Endpunkt des Fadens dieselben Schwingungen ausführt wie die *Projektion* eines Punktes, der eine Kreisperipherie mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, auf einen Durchmesser des Kreises (vgl. Teil I, S. 17). Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Endpunkt an der Stelle $B'(x = a)$, zur Zeit $t = \frac{1}{4}T$ in $B(x = 0)$, zur Zeit $t = \frac{1}{2}T$ in $B''(x = -a)$ (Fig. 35). Dann findet eine Umkehrung des Sinnes der Bewegung statt; zur Zeit $t = \frac{3}{2}T$ ist der Endpunkt wieder in B, zur Zeit T in B'. Der absolute Wert der Geschwindigkeit ist am größten in B, er ist Null in B' und B''.

Fig. 35.

Bei der vorstehenden Rechnung wurde übrigens der Widerstand der Luft und die Tatsache, daß der Faden nicht vollkommen elastisch ist, vernachlässigt. In Wirklichkeit sind diese Einflüsse vorhanden, und

sie haben zur Folge, daß die Amplituden der Schwingungen immer kleiner werden und daß schließlich die Ruhelage eintritt.

40. Wir wollen nun annehmen, der untere Endpunkt des Fadens in Aufg. 39 erhalte, wenn er über die Gleichgewichtslage B hinaus nach B' gezerrt worden ist, noch einen nach unten gerichteten Stoß, der ihm die Geschwindigkeit v_1 erteilt. Wie verläuft jetzt die Bewegung?

Nun gehören die Werte $t = 0$, $x = a$, $v = v_1$ zusammen; an Stelle von (3) tritt daher

$$v^2 - v_1^2 = \varkappa^2(a^2 - x^2). \tag{7}$$

Ferner wird

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2 - \varkappa^2 x^2}, \quad t = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2 - \varkappa^2 x^2}}$$

oder

$$\varkappa t + c_1 = \pm \arcsin \frac{\varkappa x}{\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2}}.$$

So folgt

$$\begin{aligned} \varkappa x &= \pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2} \sin(\varkappa t + c_1) \\ &= \pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2} (\sin \varkappa t \cos c_1 + \cos \varkappa t \sin c_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Zur Bestimmung von c_1 beachte man, daß die Werte $t = 0$ und $x = a$ zusammengehören; man findet alsdann

$$\sin c_1 = \frac{\varkappa a}{\pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2}}, \quad \cos c_1 = \frac{v_1}{\pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2}},$$

mit Rücksicht auf (8) wird also

$$\varkappa x = \pm v_1 \sin \varkappa t + \varkappa a \cos \varkappa t.$$

Das Vorzeichen des Gliedes $v_1 \sin \varkappa t$ ergibt sich, wenn man beachtet, daß $\frac{dx}{dt}$ gleich v_1 sein muß, wenn $t = 0$ ist; dies tritt ein, wenn das Pluszeichen steht. Es gelten also die Gleichungen

$$\varkappa x = v_1 \sin \varkappa t + \varkappa a \cos \varkappa t, \quad v = \frac{dx}{dt} = v_1 \cos \varkappa t - \varkappa a \sin \varkappa t. \tag{9}$$

Die Geschwindigkeit wird Null im Augenblick der größten Zusammenziehung und bei der größten Ausdehnung; alsdann ist

$$\operatorname{tg} \varkappa t = v_1 : \varkappa a,$$

$$\sin \varkappa t = \frac{v_1}{\pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2}}, \quad \cos \varkappa t = \frac{\varkappa a}{\pm\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2}},$$

wo bei den Wurzeln entweder jedesmal das obere oder jedesmal das

untere Vorzeichen zu stehen hat. Die zugehörige Amplitude der Schwingung wird nach der ersten Gleichung (9)

$$(10) \qquad x_1 = \pm \frac{1}{\varkappa}\sqrt{v_1^2 + \varkappa^2 a^2} = \pm \sqrt{a^2 + \frac{v_1^2}{\varkappa^2}}.$$

Man sieht, wie die Ausdehnung des Fadens oder Stabes *größer* geworden ist. Nach einem neuen Stoß auf das untere Ende des Fadens oder Stabes in seiner tiefsten Lage, der diesem Ende wieder die Geschwindigkeit v_1 erteilt, würde an Stelle von x_1 der Ausdruck

$$(11) \qquad x_2 = \pm \sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\varkappa^2}}$$

treten; offenbar wird $x_2^2 = a^2 + \frac{2v_1^2}{\varkappa^2}$ usf.

Der hier betrachtete Bewegungsvorgang ist ein Beispiel für eine *erzwungene Schwingung*, während in der vorhergehenden Aufgabe die *Eigenschwingung* oder natürliche Schwingung des Fadens oder Stabes und des angehängten Gewichts betrachtet wurde. Wie Gleichung (11) zeigt, können rhythmische Stöße, deren Periode mit der Periode der Eigenschwingungen zusammenfällt, eine so große Amplitude und daher eine solche Spannung in dem Stabe veranlassen, daß dieser zerreißt. Hierauf beruht es, daß *Hängebrücken* unter dem regelmäßigen Tritt darüber marschierender Soldaten eingestürzt sind.[1])

Fig. 36.

41. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

42. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x.$

Auf dieses Integral trifft man z. B. bei der Aufgabe:

43. Den *Druck* zu bestimmen, der durch den *Wind* auf einen senkrecht stehenden Turm von kreisförmiger Basis ausgeübt wird. Hierbei sei h die Höhe des Turmes in Metern, a der Radius der Basis und p der in Kilogrammen gemessene Winddruck auf je 1 qm einer rechtwinklig getroffenen ebenen Fläche.

Durch den Kreis k (Fig. 36) sei die Basis des Turmes angedeutet;

1) Vgl. hierzu auch Köpcke, Deutsche Bauzeitung, 19. Jahrgang (1885), S. 163—167; 20. Jahrgang (1886), S. 549; Deslandres, Annales des ponts et chaussées, Bd. 4 der 7. Serie (Jahrgang 1892, 2. Semester), S. 765—782; F. Steiner, Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 44. Jahrgang (1892), S. 113—117; S. 672—674; F. Engesser, ebenda S. 386—388; S. 671—672.

der Wind streiche in der zum Durchmesser AB parallelen Richtung. Der senkrechte Streifen der Turmwandung, der sich über dem zu A gehörigen Bogenelement $d\sigma$ des Kreises k erhebt, wird vom Wind unter rechtem Winkel getroffen; auf ihn wirkt daher der „Normaldruck" $dv = ph\,d\sigma$. Der Streifen der Turmwandung, der sich über dem seitlich liegenden Bogenelement ds senkrecht erhebt, wird nicht von dem vollen Druck $ph\,ds$ getroffen, vielmehr wirkt rechtwinklig auf ihn der Normaldruck $dn = ph\,ds \cdot \sin\varphi$, denn so groß ist die rechtwinklig zu der Fläche $h\,ds$ wirkende Komponente des in der Richtung AB wirkenden Winddruckes. Hierbei bedeutet φ den spitzen Winkel, den die Tangente des Bogenelements ds mit der Windrichtung bildet.

Der Normaldruck dn läßt sich nun in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine rechtwinklig zur Richtung des Windes, die andere in der Windrichtung wirkt. Die erstgenannte wird durch eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Komponente aufgehoben, wie man bei Berücksichtigung des zu ds in bezug auf den Durchmesser AB symmetrisch gelegenen Elements ds_1 erkennt. Die in der Windrichtung wirkende Komponente dw von dn wird hingegen (Fig. 37)

Fig. 37.

$$dw = dn \sin\varphi = ph\,ds \cdot \sin^2\varphi = pha \sin^2\varphi\, d\varphi;$$

der in dieser Richtung auf den ganzen Turm ausgeübte Druck wird daher

$$w = pah \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{pah\pi}{2}.$$

Man setzt häufig $p = \frac{v^2\gamma}{g}$ kg/qm, wo v die Geschwindigkeit des Windes in m/sek, $g = 9{,}81$ m/sek^2 die Beschleunigung der Schwere, γ das Gewicht von 1 cbm Luft in kg bezeichnet. Bei einer Temperatur von 15° C und einem Barometerstand von 760 mm ist $\gamma : g = 0{,}1249$, also abgerundet

$$p = v^2 \cdot 0{,}125 = \tfrac{1}{8} v^2.$$

Wird als größte Geschwindigkeit des Windes $v = 30$ m/sek angenommen[1]), so erhält man $p = 112{,}5$; für nicht freistehende Gebäude nimmt man gewöhnlich $p = 125$ kg/qm an. Alsdann würde

$$w = \frac{125\, ah\pi}{2} = 196\, ah \quad \text{oder abgerundet} \quad w = 200\, ah \text{ kg/qm}.$$

1) Beim Bau des auf dem Gipfel der Zugspitze in etwa 2965 m Höhe befindlichen meteorologischen Observatoriums, eines Turmes mit quadratischer Basis, wurde die bisher bekannte größte Orkangeschwindigkeit $v = 60$ m/sek, die vor etwa zwanzig Jahren auf dem Gipfel des Sonnblick in den Hohen Tauern gemessen wurde, zugrund gelegt und $p = 500$ kg/qm angenommen. Vgl. W. Burkhard, Das Observatorium auf der Zugspitze, Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, Bd. 31 (Jahrgang 1900), S. 2.

Es muß übrigens bemerkt werden, daß die vorstehenden Betrachtungen wie auch die auf Newton zurückgehende Annahme, daß die Größe p dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, keine *volle* Gültigkeit haben, sondern nur angenähert richtig sind.[1])

Fig. 38.

44. Die Stützmauer eines Wasserreservoirs hat im Querschnitt auf der Wasserseite den Bogen AE eines Kreises vom Radius a zur Begrenzung, der Mittelpunkt O dieses Kreises liege im Wasserspiegel AB, der zum Bogen AE gehörige Zentriwinkel sei ε (Fig. 38). Man soll den im Querprofil auf den Kreisbogen ausgeübten gesamten horizontalen und vertikalen Druck des Wassers bestimmen.[2])

Der auf ein Bogenelement $PQ = ds$ des Kreises ausgeübte Druck ist nach einem elementaren Satze der Hydrostatik (vgl. S. 18) gleich dem Produkt aus dem Gewicht γ der Volumeinheit des Wassers, der Länge ds des Bogenelements und der Tiefe RP, in der sich der Punkt P unter dem Wasserspiegel befindet. Im vorliegenden Fall sei $\gamma = 1$.

Bildet der Radius OP mit der Horizontalen OA den Winkel φ, so ist nun $RP = a \sin\varphi$, $PQ = ds = a\,d\varphi$. Der auf PQ ausgeübte Druck ist daher gleich $a^2 \sin\varphi\, d\varphi$ und hat die horizontale Komponente $dX = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi$, die vertikale Komponente $dY = a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi$.

Die horizontale Komponente X des gesamten auf den Bogen AE ausgeübten Druckes wird daher

$$X = a^2 \int_0^{\varepsilon} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\varepsilon} = \frac{a^2}{2} \sin^2 \varepsilon;$$

ferner erhält man

$$Y = a^2 \int_0^{\varepsilon} \sin^2\varphi\, d\varphi = a^2 \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\varepsilon} = \frac{a^2}{4}(2\varepsilon - \sin 2\varepsilon).$$

Der gesamte Druck wird $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

---

1) Näheres hierüber findet man z. B. in dem Artikel von S. Finsterwalder über Aërodynamik in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 4, 3. Teilband, Leipzig 1901—1908, S. 150 ff., ferner in dem Werke von F. W. Lanchester, Aërodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen, aus dem Englischen übersetzt von C. und A. Runge, Bd. 1, Leipzig 1909, Bd. 2, Leipzig 1911, sowie bei G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig und Berlin 1912, S. 109 ff.

2) Vgl. L. Herzka, Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, 47. Jahrgang (1895), S. 292 f.

45. Nach dem Gesetze von Joule ist die durch einen elektrischen Strom von der Stärke i Ampère in einem Leiter vom Widerstand r Ohm (vgl. Teil I, Fußnote zu S. 113) während einer Zeit von t Sekunden entwickelte Wärmemenge Q in Grammkalorien gegeben durch den Ausdruck

$$Q = 0{,}2388\, r i^2 t.$$

Der elektrische Strom sei nun periodisch veränderlich entsprechend der Formel

$$i = i_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

wo i_0 das Maximum der Stromstärke, T die Zeitdauer der Periode in Sekunden bedeutet. Wie groß ist alsdann die Wärmemenge Q_0, die während einer halben, zur Zeit $t = 0$ beginnenden Periode erzeugt wird?

Während eines Zeitelements dt wird die Wärmemenge $0{,}2388\, r i^2 dt$ erzeugt, daher ergibt sich

$$Q_0 = 0{,}2388\, r i_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}T} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\, dt = \frac{0{,}2388\, r i_0^2\, T}{4}.$$

46. *Integrale von Differentialen, die eine Irrationalität wie* $\sqrt{a^2 - x^2}$ *enthalten, lassen sich zuweilen leicht mit Hilfe einer Substitution wie* $x = a \cos z$ *oder* $x = a \sin z$ *berechnen;* man wende dies an auf

$$\int \frac{x\, dx}{+\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x = a \cos z, \quad dx = -a \sin z\, dz$$

$$J = -a \int \cos z\, dz = -a \sin z = -a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

47. Auf dieses Integral kommt man z. B. bei der Aufgabe: die Bewegung eines materiellen Punktes P zu bestimmen, der sich zur Zeit $t = 0$ noch in Ruhe befindet und nun von einem festen Punkte M mit einer Kraft angezogen wird, die umgekehrt proportional der *dritten* Potenz des Abstandes $MP = x$ ist; außerdem sei diese Kraft der Masse m des Punktes proportional. Man löse diese Aufgabe.

Nach einem Grundgesetz der Dynamik (vgl. S. 13) ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m k^2}{x^3},$$

wo t die Zeit, k^2 einen Proportionalitätsfaktor bedeutet und rechts das Minuszeichen steht, weil die Anziehung den Abstand $MP = x$ zu ver-

kleinern sucht. Bezeichnet man die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ mit v, so ist $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, daher

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k^2}{x^3}, \quad \int v\,dv = -k^2\int\frac{dx}{x^3}$$

oder

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{k^2}{x^2} + c_1.$$

Ist zur Zeit $t = 0$ der Abstand $MP = a$, so wird, da zu dieser Zeit $v = 0$ sein sollte, die Integrationskonstante $c_1 = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{a^2}$, somit

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{k^2(a^2 - x^2)}{a^2x^2}$$

und

$$-\frac{ax\,dx}{+\sqrt{a^2 - x^2}} = +k\,dt;$$

dabei steht links das Minuszeichen, weil mit wachsender Zeit ($dt > 0$) x abnimmt ($dx < 0$). Die Integration ergibt nach Aufg. 46

$$+a\sqrt{a^2 - x^2} = kt + c_2,$$

und hier ist $c_2 = 0$, da die Werte $t = 0$ und $x = a$ zusammengehören sollten. Es findet sonach die Beziehung statt

$$a^2(a^2 - x^2) = k^2t^2 \quad \text{oder} \quad x = +\frac{1}{a}\sqrt{a^4 - k^2t^2}.$$

Man bemerkt, daß der Punkt nach Verlauf der Zeit $t = a^2 : k$ mit unendlich großer Geschwindigkeit in das feste Zentrum M stürzt.

Anders gestaltet sich die Lösung, wenn die Geschwindigkeit des Punktes P zur Zeit $t = 0$ von Null verschieden ist.

48. *Integrale von Differentialen, die $\sqrt{a^2 + x^2}$ enthalten, sind mitunter durch die Substitution $x = a\,\mathfrak{Sin}\,z$ leicht zu erledigen;* so z. B.

$$\int\frac{dx}{+\sqrt{1 + x^2}}.$$

Durch die Substitution $x = \mathfrak{Sin}\,z$, $dx = \mathfrak{Cof}\,z\,dz$ erhält man mit Rücksicht auf die Fundamentalgleichung $\mathfrak{Cof}^2 z - \mathfrak{Sin}^2 z = 1$:

$$J = \int dz = z.$$

Nun ist

$$x = \mathfrak{Sin}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathfrak{Cof}\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = +\sqrt{x^2 + 1},$$

daher $\mathfrak{Sin}\,z + \mathfrak{Cof}\,z = e^z = x + \sqrt{x^2 + 1}$ und $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

So folgt

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

49. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{x^2+m^2}}, \quad x = mz, \quad dx = m\,dz,$$

$$J = \int \frac{dz}{+\sqrt{z^2+1^2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) = \ln\left(\frac{x}{m}+\frac{\sqrt{x^2+m^2}}{m}\right),$$

und hierfür kann auch $\ln\left(x+\sqrt{x^2+m^2}\right)$ geschrieben werden, wenn man $-\ln m$ in die Integrationskonstante eingehen läßt, die eigentlich noch beizufügen ist.

50. $$\int \frac{x\,dx}{+\sqrt{x^2+m^2}}, \quad x = m\,\mathfrak{Sin}\,z, \quad dx = m\,\mathfrak{Cos}\,z\,dz$$

$$J = m\int \mathfrak{Sin}\,z\,dz = m\,\mathfrak{Cos}\,z = +\sqrt{x^2+m^2}.$$

51. Man soll die *Gleichgewichtslage eines dünnen, vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Seiles (Fadens) bestimmen, wenn dieses an seinen beiden Enden A, B aufgehängt und der Wirkung der Schwere überlassen wird.* Das Seil sei homogen und habe konstanten Querschnitt; das Gewicht eines Seilstückes von der Länge 1 cm sei q gr. Ferner werde angenommen, daß die Enden A und B in der vertikalen xy-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems liegen, bei dem sich die positive Richtung der y-Achse vertikal nach oben erstrecke.

In gleicher Weise wie bei Aufg. 38, S. 21 findet man, daß die gesuchte Kurve der Mittellinie des Seiles in der xy-Ebene liegt. An Stelle der Gleichungen (3), S. 21 treten nun die folgenden:

$$(1) \qquad S\cos\alpha = c_1, \quad d(S\sin\alpha) - q\,ds = 0,$$

von denen die erste aussagt, daß die wagrechte Komponente der Spannung in jedem Punkt der Kurve gleich groß ist. Ferner ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{daher} \quad S\sin\alpha = S\cos\alpha\cdot\frac{dy}{dx} = c_1\frac{dy}{dx}.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für das Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ (vgl. Teil I, S. 154) geht also die zweite Gleichung (1), wenn noch $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, über in

$$c_1\frac{dp}{dx} - q\sqrt{1+p^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{q}{c_1}\,dx,$$

woraus durch Integration nach Aufg. 48

$$(2) \qquad \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{q}{c_1}x + C$$

hervorgeht. Die Integrationskonstante C möge durch die Forderung bestimmt werden, daß die Kurve in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse wagrecht verlaufe; dann gehören die Werte $x = 0$ und $p = 0$ zusammen, und man findet $C = 0$. Setzt man noch $c_1 : q = m$, so wird

$$(3) \qquad p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{m}},$$

$$p - \sqrt{1 + p^2} = \frac{-1}{p + \sqrt{1 + p^2}} = -e^{-\frac{x}{m}},$$

daher

$$(4) \qquad p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right),$$

$$(5) \qquad y = m\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) + c_2 = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) + c_2.$$

Sollen hier $x = 0$ und $y = m$ zusammengehören, so folgt $c_2 = 0$, und man erhält

$$(6) \qquad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right),$$

also die Gleichung einer *Kettenlinie* (vgl. Fig. 33, S. 67 und Teil I, S. 48).

Die früher eingeführte Integrationskonstante c_1 stellt offenbar die Spannung H im Scheitel der Kettenlinie dar, denn für $\alpha = 0$ ergibt die erste Gleichung (1) $S = c_1$, allgemein ist also $S \cos\alpha = H = c_1$ und

$$(7) \qquad S = H : \cos\alpha,$$

die *kleinste Spannung ist daher im Scheitel der Kurve.*

Die Konstante m ist, mechanisch gedeutet, das Verhältnis dieser kleinsten Spannung zum Gewicht q der Längeneinheit des Seiles, $m = H : q$; daher wird die *Spannung S an einer beliebigen Stelle* gleich $qm : \cos\alpha = qm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = qm\sqrt{1 + p^2}$, wofür wegen (4) und mit Rücksicht auf die fundamentale Beziehung

$$\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) - \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x}{m}\right) = 1$$

auch $qm\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ gesetzt werden kann, es ist somit

$$(8) \qquad S = qy,$$

d. h.: *In irgend einem Punkt P der Kettenlinie* (6) *ist die Spannung S so groß wie das Gewicht eines Fadenstücks, das dieselbe Länge hat wie*

die Ordinate des Punktes P. Die vertikale Komponente V der Spannung ist natürlich

$$(9) \qquad V = H \operatorname{tg} \alpha = H \cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) = +q\sqrt{y^2 - m^2}.$$

52. Man soll die *Gleichung der Seilkurve* ableiten, falls unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie bei der vorhergehenden Aufgabe der *Querschnitt k des Seiles an irgend einer Stelle P der daselbst vorhandenen Spannung S proportional* sein soll, so daß $k = cS$ ist, wo c die Proportionalitätskonstante bedeutet.

Das Gewicht eines Seilelementes ds ist dessen Volumen $k\,ds = cS\,ds$ proportional, also auch proportional zu $S\,ds$, wir können dieses Gewicht gleich $\frac{S\,ds}{a}$ setzen. An die Stelle der Gleichungen (1) in Aufg. 51 treten alsdann die folgenden:

$$(1) \qquad S\cos\alpha = c_1, \quad d(S\sin\alpha) = \frac{1}{a}\,S\,ds.$$

Auch hier ist wieder c_1 gleich der Spannung H der Kurve in demjenigen Punkte, dessen Tangente wagrecht liegt. Trägt man $S = H : \cos\alpha$ in die zweite Gleichung (1) ein, so geht diese in

$$(2) \qquad d(H \operatorname{tg}\alpha) = \frac{H}{a\cos\alpha}\,ds$$

über, und mit Rücksicht darauf, daß $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = p$ und $ds = \sqrt{1+p^2}\,dx$ ist, erhält man aus (2):

$$H\,dp = \frac{H}{a}(1+p^2)\,dx$$

und

$$(3) \qquad \frac{x}{a} = \int \frac{dp}{1+p^2} = \operatorname{arc\,tg} p + C.$$

Nimmt man die y-Achse in solcher Lage an, daß sie durch einen Kurvenpunkt mit wagrechter Tangente geht, so gehören die Werte $x = 0$ und $p = 0$ zusammen; alsdann ist $C = 0$, und (3) kann durch

$$(4) \qquad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{a}$$

ersetzt werden. Hieraus folgt

$$(5) \qquad y = \int \operatorname{tg}\left(\frac{x}{a}\right) dx = -a \ln\cos\frac{x}{a} + C_1, \quad \text{(vgl. Aufg. 28, S. 80)},$$

und wenn man die x-Achse in die eben erwähnte wagrechte Tangente verlegt, ist $C_1 = 0$ zu setzen. Die Gleichung der Kurve wird alsdann

$$(6) \qquad y = -a\ln\cos\frac{x}{a} \quad \text{oder} \quad e^{\frac{y}{a}} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}}.$$

Man bezeichnet diese Kurve als die *Kettenlinie gleichen Widerstandes*[1]), da eine solche Kette in allen Punkten gleiche Zugfestigkeit hat.

Die Kurve (6) ist zur y-Achse symmetrisch und besteht aus unendlich vielen unter sich kongruenten Zweigen, da die Funktion $\cos\frac{x}{a}$ die Periode $2a\pi$ hat. Alle diese Zweige verlaufen oberhalb der x-Achse, und jeder berührt diese Achse an einer Stelle; die Berührungspunkte haben der Reihe nach die Abszissen $0, \pm 2a\pi, \pm 4a\pi, \ldots$ Der Kurvenzweig, der die x-Achse im Koordinatenanfang berührt und praktisch allein bei der Lösung unserer Aufgabe in Betracht kommt, hat die Geraden $x = \frac{1}{2}a\pi$ und $x = -\frac{1}{2}a\pi$ zu Asymptoten und liegt innerhalb des durch diese Geraden begrenzten Streifens von der Breite $a\pi$. Durchläuft x in diesem Streifen das Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}a\pi$, so durchläuft $\cos\frac{x}{a}$ das Intervall von 1 bis 0, und $y = -a\ln\cos\frac{x}{a}$ geht von 0 bis $+\infty$. Die übrigen Kurvenzweige erhält man, indem man den eben erwähnten Zweig parallel zur x-Achse nach links oder rechts wiederholt um die Strecke $2a\pi$ verschiebt.

53. $$\int\frac{dx}{1-\cos x} = \int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -\cot\frac{1}{2}x.$$

54. $$\int\frac{dx}{1+\cos x} = \int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x.$$

55. Welche Formeln erhält man aus (53) und (54), wenn $x = \frac{1}{2}\pi - z$ gesetzt wird?

$$\int\frac{dz}{1-\sin z} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) \quad \text{und} \quad \int\frac{dz}{1+\sin z} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right).$$

56. Welche Formeln erhält man aus (53) und (54), wenn $x = \frac{1}{2}\pi + z$ gesetzt wird?

$$\int\frac{dz}{1+\sin z} = -\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) \quad \text{und} \quad \int\frac{dz}{1-\sin z} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right).$$

Warum stehen diese Formeln nicht in Widerspruch zu den Formeln in Aufg. 55?

---

1) Näheres über diese Kurve findet man bei G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, deutsche Ausgabe von F. Schütte, 2. Aufl., 2. Bd. Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven, Leipzig und Berlin 1911, S. 209; H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908 (Sammlung Schubert, Nr. 56), S. 317—318.

57. Unter Benutzung der in Aufg. 8, S. 50 abgeleiteten Formel für $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ beweise man die Gleichung:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x.$$

$$J = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\,dx = \ln \operatorname{tg} x.$$

58. Aus diesem Ergebnis soll die Formel

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$$

abgeleitet werden und hieraus

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Aus Aufg. 57 folgt

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x,$$

und hier ersetze man $2x$ durch x; alsdann erhält man die erste der zwei zu beweisenden Formeln. Aus ihr ergibt sich die zweite, wenn man x durch $\frac{1}{2}\pi + x$ ersetzt.

59. $$\int \frac{\sin x \cos x}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}\,dx.$$

$$J = \frac{1}{2(b-a)} \int \frac{2(b-a) \sin x \cos x}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2(b-a)} \ln (a \cos^2 x + b \sin^2 x).$$

60. Mit Hilfe der Substitution $x = \cos z$ und unter Rücksicht auf das Ergebnis in Aufg. 53 bestimme man $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

$$J = -\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \cot \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Hierbei sind die Beziehungen

$$\cos \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos z)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + x)}$$

und

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos z)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - x)}$$

benutzt worden, die sich aus $x = \cos z$ ergeben.

61. $\int \sin mx \cos nx\,dx$, wobei m und n *beliebige* Zahlen sind.

Das Produkt $\sin mx \cos nx$ kann nach einer bekannten Formel der Goniometrie durch $\frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \frac{1}{2}\sin(m-n)x\}$ ersetzt werden. Alsdann folgt leicht, falls $|m| \neq |n|$ ist:

$$J = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x + \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right\}.$$

62. Die Richtigkeit der Formel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

zu beweisen.

Die Funktion $\sin mx \cos nx$ ist eine *ungerade* Funktion, das Integral verschwindet also nach Regel **6**, S. 75.

63. Sind m und n beliebige *ganze* Zahlen, so gelten die Formeln

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 0, \quad \text{wenn } |m| \neq |n| \text{ ist},\\ &= \pi, \quad \text{wenn } m = n,\\ &= -\pi, \quad \text{wenn } m = -n \text{ ist}.\end{aligned}$$

Hier benutzt man die Formel

$$\sin mx \sin nx = \tfrac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$$

und verfährt dann ähnlich wie in Aufg. 61.

64. Ebenso beweise man unter derselben Voraussetzung über m und n:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= 0, \quad \text{wenn } |m| \neq |n| \text{ ist},\\ &= \pi, \quad \text{wenn } m = \pm n \text{ ist},\\ &= \pi, \quad \text{wenn } m = n = 0 \text{ ist}.\end{aligned}$$

Hier ist die Formel

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$$

zu benutzen.

Die Integrale in Aufg. 62 bis 64 ändern übrigens ihren Wert nicht, wenn man als Integrationsgrenzen nicht $-\pi$ und $+\pi$, sondern 0 und 2π nimmt.

Unter der Voraussetzung, daß m und n ganze Zahlen sind, beweise man die Richtigkeit der Formeln in Aufg. 65 bis 67.

65. $\int_0^\pi \sin mx \cos nx\, dx = \frac{2m}{m^2 - n^2}$, wenn $m - n$ (und also auch $m + n$) eine ungerade Zahl ist,

$= 0,$ wenn $m - n$ (und also auch $m + n$) eine gerade Zahl ist.

66. $\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = 0,$ wenn $|m| \neq |n|$ ist,

$= \frac{1}{2}\pi,$ für $m = n,$

$= -\frac{1}{2}\pi$ für $m = -n.$

67. $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = 0,$ wenn $|m| \neq |n|$ ist,

$= \frac{1}{2}\pi,$ wenn $m = \pm n$ ist.

Die Integrale in den Aufg. 62—67 sind wichtig in der Theorie der Fourierschen oder trigonometrischen Reihen (vgl. § 11).

68. Die von einem elektrischen Strom während eines Zeitelements dt geleistete Arbeit wird dargestellt durch das Produkt aus der elektromotorischen Kraft E, der Stromstärke i und dem Zeitelement dt. Bei einem *Wechselstrom* sei nun

$$E = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad i = i_0 \sin(\omega t + \psi).$$

Man bestimme die der Zeitdauer einer Periode $T = 2\pi : \omega$ entsprechende Arbeit p.

Man erhält

$$p = \int_0^T Ei\, dt = E_0 i_0 \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \psi)\, dt,$$

und bei Benutzung der schon in Aufg. 63 angewandten goniometrischen Formel folgt

$$p = E_0 i_0 \int_0^T \frac{1}{2} \{\cos(\varphi - \psi) - \cos(2\omega t + \varphi + \psi)\}\, dt$$

$$= \frac{E_0 i_0}{2} \cos(\varphi - \psi) \cdot T - \frac{E_0 i_0}{4\omega} \left[\sin(2\omega t + \varphi + \psi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}.$$

Hier verschwindet das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung, es bleibt

$$p = \frac{E_0 i_0 T}{2} \cos(\varphi - \psi).$$

69. Man berechne $\int \cos mx \cos nx \cos px\, dx$.

$$J = \int \frac{1}{2} \{\cos(m+n)x \cos px + \cos(m-n)x\cos px\}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \{\cos(m+n+p)x + \cos(m+n-p)x$$
$$+ \cos(m-n+p)x + \cos(-m+n+p)x\}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(m+n+p)x}{m+n+p} + \frac{\sin(m+n-p)x}{m+n-p}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin(m-n+p)x}{m-n+p} + \frac{\sin(-m+n+p)x}{-m+n+p}\right\}.$$

Verschwindet eine der Zahlen $m+n+p$, $m+n-p$, $m-n+p$, $-m+n+p$, so tritt in dem Integralwert $\frac{1}{4}x$ an Stelle des betreffenden Gliedes.

70. Ähnlich beweist man:

$$\int \sin mx \sin nx \sin px\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(-m+n+p)x}{-m+n+p} + \frac{\cos(m-n+p)x}{m-n+p}\right.$$
$$\left. + \frac{\cos(m+n-p)x}{m+n-p} - \frac{\cos(m+n+p)x}{m+n+p}\right\}.$$

Verschwindet eine der Zahlen $-m+n+p$, $m-n+p$, $m+n-p$, $m+n+p$, so verschwindet das betreffende Glied auch in dem Integralwert.

71. Mit Hilfe der Methode der teilweisen Integration beweise man die Formel

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\, dx.$$

$$J = \int \sin^{m-1}x \sin x\, dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\, dx - (m-1)\int \sin^m x\, dx \text{ usw.}$$

Bei mehrmaliger Anwendung dieser „*Rekursionsformel*“ kann das vorgelegte Integral bestimmt werden, falls m eine ganze positive Zahl ist; für ganzes negatives m vgl. Aufg. 78.

72. Die Formel

$$\int \cos^m x\, dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1}x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x\, dx$$

zu beweisen, indem man in Aufg. 71 die Größe x durch $\frac{1}{2}\pi - x$ ersetzt.

73. $\int \sin^4 x\, dx.$

$$J = -\tfrac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \tfrac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx = -\tfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \tfrac{3}{8}\sin x \cos x + \tfrac{3}{8}x.$$

74. $\int \cos^7 x\, dx.$

Die Substitution $\sin x = z$ ergibt

$$J = \int (1 - z^2)^3\, dz = z - z^3 + \tfrac{3}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7$$

oder

$$J = \sin x\,\{1 - \sin^2 x + \tfrac{3}{5}\sin^4 x - \tfrac{1}{7}\sin^6 x\}.$$

75. Ist m eine *ungerade* positive Zahl, $m = 2n + 1$, so lassen sich die Integrale in Aufg. 71 und 72 auch erledigen, indem man z. B. $\int \cos^{2n+1} x\, dx$ durch $\int (1 - \sin^2 x)^n \cos x\, dx$ oder $\int (1 - z^2)^n\, dz$ ersetzt, wo $z = \sin x$ ist, alsdann $(1 - z^2)^n$ nach der Formel für die Binomialreihe (Teil I, S. 88) entwickelt und hierauf gliedweise integriert.

Zur Berechnung der Integrale in Aufg. 71 und 72 kann man ferner folgende vier Formeln anwenden, die in der algebraischen Analysis bewiesen werden:

$$2^{2m-1}\cdot\cos^{2m} x = \cos 2mx + \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x + \cdots$$
$$+ \binom{2m}{k}\cos(2m-2k)x + \cdots + \binom{2m}{m-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$

$$(-1)^m\cdot 2^{2m-1}\sin^{2m} x = \cos 2mx - \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x$$
$$+ \binom{2m}{2}\cos(2m-4)x - \cdots + (-1)^k\cdot\binom{2m}{k}\cos(2m-2k)x + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot(-1)^m\cdot\binom{2m}{m},$$

$$2^{2m}\cos^{2m+1} x = \cos(2m+1)x + \binom{2m+1}{1}\cos(2m-1)x$$
$$+ \binom{2m+1}{2}\cos(2m-3)x + \cdots + \binom{2m+1}{k}\cos(2m-2k+1)x + \cdots$$
$$+ \binom{2m+1}{m-1}\cos 3x + \binom{2m+1}{m}\cos x,$$

$$(-1)^m 2^{2m}\cdot\sin^{2m+1} x = \sin(2m+1)x - \binom{2m+1}{1}\sin(2m-1)x$$
$$+ \binom{2m+1}{2}\sin(2m-3)x + \cdots + (-1)^k\binom{2m+1}{k}\sin(2m-2k+1)x + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1}\binom{2m+1}{m-1}\sin 3x + (-1)^m\binom{2m+1}{m}\sin x.$$

76. Mit Hilfe der in Aufg. 71 u. 72 zum Beweis gestellten Formeln leite man die Gleichungen ab:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m+1} x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

77. Unter Rücksicht auf die Ungleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m-1} x\,dx > \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x\,dx > \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m+1} x\,dx$$

benutze man die Ergebnisse von Aufg. 76 zum Beweis der Formel von J. Wallis[1]):

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdots.$$

Man erhält

$$\frac{2m-2}{2m-1} \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} > \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$> \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

oder

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{(2m-4)}{(2m-3)} \cdot \frac{(2m-2)}{(2m-3)} \cdot \frac{(2m-2)}{(2m-1)} \cdot \frac{2m}{2m-1} > \frac{\pi}{2}$$
$$> \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-3} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Die beiden äußeren Seiten dieser Ungleichung sind nur um den Faktor $\frac{2m}{2m+1}$ voneinander verschieden, der für $\lim m = \infty$ der Einheit gleich wird.

78. Mit Hilfe der Ergebnisse von Aufg. 71 und 72 leite man durch die Substitution $m - 2 = -n$ die Formel ab:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

und

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

---

1) Arithmetica infinitorum, Oxford 1655 oder J. Wallis, Opera mathematica, Bd. 1, Oxford 1699, S. 467—469.

Ist n eine positive *gerade* Zahl, so gelangt man bei fortgesetzter Anwendung dieser Formeln schließlich zu

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x;$$

im Falle eines positiven *ungeraden* n gelangt man schließlich zu den Integralen

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

die schon in Aufg. 58 bestimmt wurden.

79. Durch Anwendung der Methode der teilweisen Integration sollen die Formeln bewiesen werden:

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx$$

und

$$\int \cot^m x\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^m x} = -\frac{1}{m-1} \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x\, dx.$$

Man ersetzt $\int \operatorname{tg}^m x$ durch

$$\int \sin^{m-1} x \cdot \cos^{-m} x \sin x\, dx = \int \sin^{m-1} x \cdot \frac{d\,\dfrac{\cos^{-m+1} x}{m-1}}{dx}\, dx$$

$$= \frac{\sin^{m-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \int \sin^{m-2} x \cos^{2-m} x\, dx, \text{ usw.};$$

in entsprechender Weise ist bei $\int \cot^m x\, dx$ zu verfahren.

Im Falle eines positiven *ungeraden* m, $m = 2n+1$, gelangt man schließlich zu den Integralen $\int \operatorname{tg} x\, dx$ und $\int \cot x\, dx$, die schon in Aufg. 28 und 27 (S. 80) bestimmt wurden. Es ergibt sich

$$\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2n} \operatorname{tg}^{2n} x - \frac{1}{2n-2} \operatorname{tg}^{2n-2} x + \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{2n-2k} \operatorname{tg}^{2n-2k} x + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + (-1)^{n-1} \ln \cos x.$$

Im Falle eines positiven *geraden* m, $m = 2n$, folgt

$$\int \operatorname{tg}^{2n} x = \frac{1}{2n-1} \operatorname{tg}^{2n-1} x - \frac{1}{2n-3} \operatorname{tg}^{2n-3} x + \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{2n-2k-1} \operatorname{tg}^{2n-2k-1} x + \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{tg} x + (-1)^n x.$$

Insbesondere wird

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x.$$

80. Für $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, wo m und n *ganze* (positive oder negative) Zahlen sind, sollen folgende Rekursionsformeln abgeleitet werden:

$$(1)\quad J = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx, \qquad m \neq -1,$$

$$(2)\quad J = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx, \quad n \neq -1,$$

$$(3)\quad J = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{m} x \cos^{n-2} x\,dx, \qquad m+n \neq 0,$$

$$(4)\quad J = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^{n} x\,dx, \qquad m+n \neq 0,$$

$$(5)\quad J = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n} x\,dx, \qquad m \neq -1,$$

$$(6)\quad J = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^{m} x \cos^{n+2} x\,dx, \quad n \neq -1.$$

Die Anwendung der teilweisen Integration führt leicht zum Ziel.

Bei negativem m und positivem n wird man die erste, dritte oder fünfte Formel anwenden, bei positivem m und negativem n die zweite, vierte oder sechste Formel. Sind m und n positiv, so führt die dritte und vierte Formel zum Ziel, sind m und n negativ, die fünfte und sechste. Im Falle $m+1=0$ versagen die Gleichungen (1) u. (5), das alsdann vorliegende Integral $\int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx$ läßt sich bei positivem n durch (3) reduzieren; im Falle $n+1=0$ versagen die Gleichungen (2) und (6), $\int \frac{\sin^m x}{\cos x}\,dx$ ist nun durch (4) zu reduzieren. Im Falle $m+n=0$ treten an Stelle von (3) und (4) die in Aufg. 79 abgeleiteten Formeln.

Nach mehrfacher Anwendung der Formeln (1) bis (6) gelangt man zu Integralen von der Form

$$\int \sin x \cos x\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \qquad \int \sin^k x\,dx, \qquad \int \cos^k x\,dx,$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Diese Integrale sind aber schon in Aufg. 6, 28, 27, 57, 71 und 72 berechnet worden.

Häufig kann man $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ direkt, ohne Anwendung von Rekursionsformeln berechnen. Dies ist der Fall, wenn *eine* der beiden Zahlen m, n *positiv* und *ungerade*, die andere *beliebig* ist. Sei z. B. $n = 2k + 1$, so wird

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cdot d \sin x,$$

und dieses Integral geht durch die Substitution $\sin x = z$ in $\int z^m (1 - z^2)^k dz$ über, wo nun $(1 - z^2)^k$ nach der Binomialreihe zu entwickeln und alsdann $z^m (1 - z^2)^k$ gliedweise zu integrieren ist.

Ein anderer Fall ist der, wo $m + n$ eine *negative gerade ganze* Zahl ist, etwa $m + n = -2k$; alsdann setzt man $\operatorname{tg} x = z$, $dx = \frac{1}{1+z^2} dz$ und erhält

$$J = \int \operatorname{tg}^m x \cos^{-2k} x\, dx = \int \operatorname{tg}^m x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)^k dx = \int z^m (1 + z^2)^{k-1} dz.$$

Die Substitution $\cot x = z$ würde

$$J = -\int z^n (1 + z^2)^{k-1} dz$$

ergeben.

Zur Anwendung der in Aufg. 80 behandelten Formeln mögen die Beispiele 81 bis 86 dienen.

81. $$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$$

Nach (3) in Aufg. 80 wird

$$J = \tfrac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \tfrac{1}{6} \int \sin^4 x\, dx,$$

wo nun das letzte Integral durch Aufg. 73 bestimmt ist. Man findet

$$J = \tfrac{1}{6} \cos x \left\{ \sin^5 x - \tfrac{1}{4} \sin^3 x - \tfrac{3}{8} \sin x \right\} + \tfrac{1}{16} x.$$

82. $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

Nach (1) in Aufg. 80 wird

$$J = -\frac{1}{2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + \frac{3}{2} \int \left(\sin x - \frac{1}{\sin x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x (\cot^2 x + 3) - \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} x.$$

83. $$\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx, \quad \sin x = z,$$

$$J = \int z^4 (1 - z^2)^2 dz = \int (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = \sin^5 x \left\{ \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{7} \sin^2 x + \tfrac{1}{9} \sin^4 x \right\}.$$

84. $$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx, \quad \sin x = z,$$

$$J = \int \frac{(1-z^2)^2}{z^2}\,dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - 2 + z^2\right) dz = -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x.$$

85. $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx, \quad \operatorname{tg} x = z.$$

$$J = \int z^2 (1 + z^2)\,dz = \operatorname{tg}^3 x \left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^2 x\right\}.$$

86. $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx, \quad \cot x = z.$$

$$J = -\int z^3 (1 + z^2)\,dz = -\tfrac{1}{12}\cot^4 x \left\{3 + 2\cot^2 x\right\};$$

die Substitution $\operatorname{tg} x = z$ würde

$$J = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^7 x \cos^4 x} = \int \frac{1+z^2}{z^7}\,dz$$

ergeben, also

$$J = -\frac{1}{12}\left(\frac{2}{z^6} + \frac{3}{z^4}\right) = -\frac{1}{12}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^4 x}\left(\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + 3\right).$$

87. Man bestimme $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^n x\,dx$ und unterscheide hierbei vier verschiedene Fälle, je nachdem die Zahlen m, n gerade oder ungerade positive ganze Zahlen sind.

Nach (3) in Aufg. 80 ist für $n > 1$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{m+n}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx;$$

bei ungeradem $n > 1$ führt daher die wiederholte Anwendung dieser Formel auf

$$\frac{n-1}{m+n}\cdot\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{2}{m+3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos x\,dx,$$

bei geradem n wird man auf

$$\frac{n-1}{m+n}\cdot\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x\,dx$$

geführt. Nun ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \cos x \, dx = \frac{1}{m+1},$$

wie die Substitution $\sin x = z$ sofort ergibt, während bei $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \, dx$ nach Aufg. 76 die beiden Fälle eines geraden und ungeraden m zu unterscheiden sind.

So erhält man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2m+2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2m+2n-1} \cdots \frac{2}{2m+3} \cdot \frac{1}{2m+1},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2m+2n+2} \cdot \frac{2n-2}{2m+2n} \cdots \frac{2}{2m+4} \cdot \frac{1}{2m+2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n!\, m!}{(m+n+1)!},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx$$

$$= \frac{2n-1}{2m+2n} \cdot \frac{2n-3}{2m+2n-2} \cdots \frac{1}{2m+2} \cdot \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m+1} x \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x \cos^{2m+1} x \, dx$$

$$= \frac{2m}{2m+2n+1} \cdot \frac{2m-2}{2m+2n-1} \cdots \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Die vorstehenden Formeln sind bei Aufg. 88 bis 91 anzuwenden.

88. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{8}{315}.$$

89. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^7 x \cos^3 x \, dx = \frac{2}{10 \cdot 8} = \frac{1}{40}.$$

90. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \frac{5 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{256} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}.$$

91. $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^9 x \cos^4 x \, dx = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{128}{15015}.$$

92. $\int x^m \operatorname{arc\,tg} x \, dx$, wo m eine ganze positive Zahl sei.

$$J = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x^{m+1}}{(m+1)(1+x^2)} \, dx.$$

Die Substitution $x = \operatorname{tg} z$, $z = \operatorname{arc\,tg} x$ ergibt $dz = \frac{dx}{1+x^2}$, womit die Integration auf Aufg. 79 zurückgeführt ist.

§ 7.

Weitere Beispiele zur Integration transzendenter Funktionen.

1. Man beweise die beiden Formeln

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2},$$

$$J_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2},$$

indem man auf J_1 und J_2 die Methode der teilweisen Integration anwendet. Durch die so entstehenden zwei Gleichungen wird je eines der beiden Integrale auf das andere zurückgeführt, und die Auflösung dieser Gleichungen nach J_1 und J_2 ergibt die gewünschten Formeln.

2. Unter der Voraussetzung $a > 0$ sind die beiden Formeln zu beweisen:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Nach Aufg. 1 ist

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = -\lim_{x=\infty} \frac{e^{-ax}(a \cos bx - b \sin bx)}{a^2 + b^2} + \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Da e^{-ax} für $\lim x = \infty$ nach Null konvergiert, während $\cos bx$ und $\sin bx$ für $x = \infty$ keinen bestimmten Grenzwert haben (vgl. Aufg. 26, S. 80), aber in ihrem ganzen Verlauf nur Werte des Intervalles von -1

bis $+1$ annehmen, hat das erste Glied der rechten Seite der letzten Gleichung den Grenzwert Null, das Integral somit den Wert $a:(a^2+b^2)$.

Analog ist das zweite vorgelegte Integral zu behandeln.

3. $$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx.$$

$$J=\frac{1}{2}\int e^{ax}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2a}e^{ax}-\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2a}e^{ax}-\frac{1}{2}\frac{e^{ax}(a\cos 2x+2\sin 2x)}{a^2+4}=\frac{2e^{ax}}{a(a^2+4)}+\frac{e^{ax}\sin x(a\sin x-2\cos x)}{a^2+4}.$$

4. Durch welche Substitution läßt sich

$$\int e^{a\,\mathrm{arc}\sin x}\,dx$$

auf ein Integral von der Form J_1 in Aufg. 1 zurückführen?

Man setze $\mathrm{arc}\sin x=z$, $x=\sin z$, so wird $J=\int e^{az}\cos z\,dz$.

5. Für $\int x^m\sin x\,dx$, wo m eine ganze positive Zahl sei, eine Rekursionsformel abzuleiten.

$$\int x^m\sin x\,dx=-x^m\cos x+m\int x^{m-1}\cos x\,dx;$$

analog wird

$$\int x^m\cos x\,dx=x^m\sin x-m\int x^{m-1}\sin x\,dx.$$

6. $$\int(\mathrm{arc}\sin x)^m\,dx,\quad \mathrm{arc}\sin x=z,\quad x=\sin z,$$

$$J=\int z^m\cos z\,dz.$$

7. $$\int\sin\sqrt[3]{x}\,dx,\quad \sqrt[3]{x}=z,\quad dx=3z^2dz,$$

$$J=3\int z^2\sin z\,dz=3\left\{-z^2\cos z+2\int z\cos z\,dz\right\}$$

$$=-3z^2\cos z+6z\sin z+6\cos z=3\left\{(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right\}.$$

8. $$\int\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx,\quad x=z^2,\quad dx=2z\,dz,$$

$$J=2\int z\,\mathrm{arc\,tg}\,z\,dz=z^2\,\mathrm{arc\,tg}\,z-\int\frac{z^2}{1+z^2}\,dz$$

$$=z^2\,\mathrm{arc\,tg}\,z-\int\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=(x+1)\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}.$$

9. Zahlreiche transzendente Differentiale können durch eine Substitution in algebraische verwandelt werden. Es sind dies z. B. alle Differentiale von der Form $f(u)\cdot u'\,dx$, wo u eine transzendente Funk-

tion $\varphi(x)$ von x und $f(u)$ eine algebraische Funktion von u bedeutet; sie werden durch die Substitution $\varphi(x)=z$ in $f(z)\,dz$ übergeführt. Man mache sich dies klar bei den folgenden Integralen, die, *von etwaigen Zahlenfaktoren abgesehen*, sämtlich in Integrale von der Form $\int f(z)\,dz$ verwandelt werden können.

$$\int f(e^{mx})\,e^{mx}\,dx, \qquad \int f(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx, \qquad \int f(\sin x)\cos x\,dx,$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx, \quad \int f(\cot x)\,\frac{1}{\sin^2 x}\,dx,$$

$$\int f(\arcsin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f(\operatorname{arc\,tg} x)\,\frac{dx}{1+x^2}.$$

Hiernach löse man die Aufgaben 10 bis 12.

10. $$\int (\ln x)^2\,\frac{dx}{x}, \quad \ln x = z,$$

$$J = \int z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3.$$

11. $$\int \frac{\sqrt{a\ln x + b}}{x}\,dx, \quad a\ln x + b = z,$$

$$J = \frac{1}{a}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{2}{3a}\sqrt{(a\ln x + b)^3}.$$

12. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{1}{(a^2 + b^2\operatorname{tg}^2 x)}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = z,$$

$$J = \int \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{bz}{a}\right) \quad \text{(nach Aufg. 17, S. 79).}$$

daher

$$J = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right).$$

13. Dieses Ergebnis wende man auf $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ und $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ an.

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}, \text{ daher } \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right);$$

ähnlich findet man $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)$.

14. $$\int \frac{dx}{1-k^2\sin^2 x}, \quad k^2 < 1,$$

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x + (1-k^2)\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1-k^2}\operatorname{tg} x\right), \text{ nach Aufg. 12.}$$

15. $$\int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}, \quad e^x = z,$$

$$J = \int \frac{dx}{a^2 z^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a e^x}{b}\right).$$

16. $\int \frac{x^m}{+\sqrt{1-x^2}}\, dx$, wo m eine ganze Zahl sei.

Durch die Substitution $x = \sin z$ folgt $J = \int \sin^m z\, dz$, womit das Integral auf Aufg. 71, S. 97 oder Aufg. 78, S. 99 zurückgeführt ist.

17. $$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\, dx, \quad x = \cos z.$$

Hier wird

$$1 - x = 2 \sin^2 \frac{z}{2}, \quad 1 + x = 2 \cos^2 \frac{z}{2}, \quad J = -2 \int \sin^2 \frac{z}{2}\, dz$$

oder

$$J = + \int (\cos z - 1)\, dz = \sin z - z = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x.$$

18. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$, wo p und q ganze positive Zahlen seien.

Mit Hilfe der Substitution $x = \sin^2 z$ erhält man

$$J = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} z \cos^{2q-1} z\, dz = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!},$$ nach Aufg. 87, S. 104.

Übrigens folgt aus diesem in p und q symmetrischen Ergebnis, daß

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1} dx$$

ist (vgl. Formel (6) in Aufg. 4, S. 74). Als Funktion *beliebiger* positiver Größen p und q betrachtet heißt dies Integral das *Eulersche Integral erster Gattung*; es wird durch $\mathrm{B}(p, q)$ bezeichnet; vgl. auch § 14.

§ 8.

Integration der rationalen Funktionen.

1. Die rationale Funktion

(1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n},$$

bei der die ganze Funktion $f(x)$ von niederem Grad sei als $F(x)$ ($m < n$, echt gebrochene rationale Funktion) und überdies

$$(2) \qquad F(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$$
$$= b_0 (x-a)(x-b) \cdots (x-h) \cdots (x-l)$$

nur *reelle, ungleiche* Faktoren hat, von denen keiner in $f(x)$ als Faktor enthalten ist, gestattet eine *Partialbruchzerlegung*:

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{H}{x-h} + \cdots + \frac{L}{x-l}.$$

Zur Bestimmung eines beliebigen Koeffizienten, z. B. H, dieser Zerlegung unterdrücke man bei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{b_0 (x-a)(x-b) \ldots (x-h) \ldots (x-l)}$$

im Nenner den Faktor $x - h$ und setze alsdann in die übrig bleibende Funktion an Stelle von x die Größe h. Das Ergebnis dieser Substitution ist der Zähler H, der zu dem Partialbruch mit dem Nenner $x - h$ gehört.

Übrigens ist H auch gleich $f(h) : F'(h)$.

Zur Herstellung der Partialbruchzerlegung (3) ist also die Kenntnis der Größen $a, b, \ldots h, \ldots l$, d. h. der Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ erforderlich.

Offenbar erhält man aus (3):

$$(4) \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = A \ln(x-a) + B \ln(x-b) + \cdots + H \ln(x-h) + \cdots + L(x-l).$$

Die Koeffizienten von $f(x)$ und $F(x)$ werden hier und im folgenden als reell vorausgesetzt.

Ist in der Funktion (1) der Grad m des Zählers größer oder gerade so groß wie der Grad n des Nenners, so muß man vor Anwendung der Partialbruchzerlegung $f(x) : F(x)$ durch Division in eine Summe aus einer ganzen und einer echt gebrochenen Funktion verwandeln.

2. Da die Koeffizienten von $F(x)$ reell sein sollen, enthält $F(x)$ neben einem *komplexen* Faktor $x - a$, wo $a = \alpha + i\beta$ ist, auch den konjugiert komplexen Faktor $x - \alpha + i\beta$. Die infolge dieser beiden Faktoren $x - \alpha - i\beta$ und $x - \alpha + i\beta$ auftretenden Integrale der Partialbrüche

$$(5) \qquad \frac{A + iB}{x - \alpha - i\beta} + \frac{A - iB}{X - \alpha + i\beta}$$

ergeben zusammen bei der Integration den Ausdruck

$$(6) \qquad A \ln [(x-\alpha)^2 + \beta^2] - 2B \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta};$$

dabei ist der Zähler $A + iB$ des ersten Partialbruches in (5) gerade so zu bestimmen wie bei einem Partialbruch mit einem reellen Nenner $x - a$ (vgl. Regel **1**).

Die zwei durch die komplexen Faktoren $x - \alpha - i\beta$ und $x - \alpha + i\beta$ des Nenners $F(x)$ veranlaßten Partialbrüche lassen sich auch in der Form

$$\frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

zusammenfassen. Das zugehörige Integral geht durch die Substitution $x - \alpha = z$ in

$$\int \frac{Mz + M\alpha + N}{z^2 + \beta^2}\, dz = \int \frac{M z\, dz}{z^2 + \beta^2} + \int \frac{M\alpha + N}{z^2 + \beta^2}\, dz$$

oder in

$$\frac{1}{2} M \ln (z^2 + \beta^2) + \frac{M\alpha + N}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\beta}$$

über, man hat daher

$$(7)\quad \int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx = \frac{1}{2} M \ln \left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] + \frac{M\alpha + N}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \alpha}{\beta}\cdot$$

3. Es sei wiederum $f(x)$ in (1) von niederem Grade als $F(x)$, aber $F(x)$ enthalte mehrfache *reelle* Faktoren, so daß etwa

$$(8)\qquad F(x) \equiv b_0 (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda$$

ist, wobei natürlich auch einige der Exponenten $\alpha, \beta, \dots \lambda$ gleich 1 sein können. Hier ergibt sich eine Partialbruchzerlegung von der Form

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ & + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung einer beliebigen Koeffizientenreihe, z. B. der $A_1, A_2, \dots A_\alpha$, unterdrücke man bei $f(x) : F(x)$ im Nenner $F(x)$ den entsprechenden Faktor $(x-a)^\alpha$ und setze in der übrig bleibenden Funktion x gleich $a + h$, ordne Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von h und dividiere nun mit dem Nenner in den Zähler. Das Ergebnis dieser *Division* ist eine nach steigenden Potenzen von h angeordnete unendliche Reihe, von der man aber nur die α ersten Glieder, also die Glieder mit $h^0, h^1, h^2, \dots h^{\alpha-1}$ braucht. Die Koeffizienten dieser Glieder sind der Reihe nach bzw. gleich $A_1, A_2, A_3, \dots A_\alpha$.

Man könnte auch folgendermaßen verfahren: Setzt man

$$F(x) = (x-a)^\alpha F_1(x),$$

so ist $f(x):F_1(x)$ die nach Unterdrückung des Faktors $(x-a)^\alpha$ des Nenners von $f(x):F(x)$ übrig bleibende Funktion, die mit $\varphi(x)$ bezeichnet werden möge. Statt nun wie vorhin $\varphi(a+h) = f(a+h):F_1(a+h)$ durch *Division* nach steigenden Potenzen von h zu entwickeln, könnte man auch diese Entwicklung mit Hilfe der *Taylorschen Reihe* (vgl. Teil I, S. 77)

$$(10)\quad \varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \cdots + \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\varphi^{(\alpha-1)}(a) + \cdots$$

ausführen, von der man — wie vorhin erwähnt wurde — nur die α ersten Glieder braucht. Bequemer ist jedoch das Divisionsverfahren, denn die Bildung der höheren Ableitungen von $\varphi(x) = f(x):F_1(x)$ ist zeitraubend.

Auch die Methode der *Koeffizientenvergleichung* führt zum Ziel: Man macht die rechte Seite der Gleichung (9) gleichnamig und beachtet, daß $b_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$ nach (8) gleich $F(x)$ ist. Nachdem die Nenner der beiden Seiten von Gleichung (9) einander gleich gemacht sind, müssen auch die Zähler übereinstimmen, und zwar für alle Werte von x; die Koeffizienten gleicher Potenzen von x müssen daher einander gleich sein. Setzt man sie einander gleich, so erhält man gerade so viele lineare Gleichungen mit den Unbekannten $A_1, A_2, \ldots A_\alpha, B_1, B_2, \ldots B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots L_\lambda$ wie zur Bestimmung dieser Unbekannten erforderlich sind. Die vorhin zuerst beschriebene Methode der Division führt meist rascher zum Ziel als die Koeffizientenvergleichung.

Die Integration der Summe (9) der einzelnen Partialbrüche macht keine Schwierigkeit (vgl. Aufg. 5, S. 50).

4. Mehrfache *komplexe* Faktoren des Nenners $F(x)$ in $f(x):F(x)$ geben Anlaß zu Partialbrüchen von der Form:

$$(11)\qquad \frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

oder auch von der Form:

$$(12)\quad \frac{A_1+iB_1}{(x-\alpha-i\beta)^n} + \frac{A_1-iB_1}{(x-\alpha+i\beta)^n} + \frac{A_2+iB_2}{(x-\alpha-i\beta)^{n-1}} + \frac{A_2-iB_2}{(x-\alpha+i\beta)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n+iB_n}{x-\alpha-i\beta} + \frac{A_n-iB_n}{x-\alpha+i\beta}.$$

Die in den Zählern auftretenden Konstanten lassen sich durch die Methode der Koeffizientenvergleichung bestimmen, bei der zweiten Form auch so wie in Regel **3** bei mehrfachen *reellen* Faktoren des Nenners gezeigt wurde.

Die *Integration* eines Partialbruches wie

$$\frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

erfolgt am besten mit Hilfe der Substitution $x - \alpha = \beta z$; man erhält alsdann

$$(13)\quad \int \frac{M_1\alpha + N_1 + M_1\beta z}{\beta^{2n}(1+z^2)^n}\beta\,dz = \int \frac{M_1\alpha + N_1}{\beta^{2n-1}(1+z^2)^n}\,dz + \int \frac{M_1\,z\,dz}{\beta^{2n-2}(1+z^2)^n},$$

wo das letzte Integral gleich

$$\frac{-M_1}{2\beta^{2n-2}(n-1)}\cdot\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}$$

ist. Das erste Integral ist mit

$$(14)\qquad \int\frac{dz}{(1+z^2)^n},$$

wofür auch

$$\int\frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^n}\,dz = \int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^n}$$

gesetzt werden kann, sofort erledigt.

Hier ist

$$\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^n} = \int z\cdot\frac{z\,dz}{(1+z^2)^n} = -\int z\cdot d\,\frac{1}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}}$$

$$= -\frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}},$$

daher folgt

$$(15)\quad \int\frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Durch diese Rekursionsformel wird das Integral (14) mit dem Exponenten n im Nenner zurückgeführt auf ein Integral derselben Art mit dem Exponenten $n-1$ im Nenner. Wiederholte Anwendung der Formel führt schließlich auf $\int\frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z$.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung von $\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$ besteht darin, daß man dieses Integral durch die Substitution $z = \operatorname{tg} u$ in $\int\cos^{2n-2}u\,du$ überführt.

A) Der Nenner der rationalen Funktion hat nur reelle Faktoren.

Beispiele.

1. $$\int \frac{11x-4}{(x-2)(x+4)}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+4}\right)dx = 3\ln(x-2)+8\ln(x+4)+\ln C$$
$$= \ln\{C(x-2)^3(x+4)^8\}.$$

2. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int\left\{\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}\right\}dx = \frac{1}{2a}\ln\left[C\frac{x-a}{x+a}\right].$$

3. $$\int \frac{7x-43}{x^2-11x+28}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-7}+\frac{5}{x-4}\right)dx = 2\ln(x-7)+5\ln(x-4)+\ln C$$
$$= \ln[C(x-7)^2(x-4)^5].$$

4. $$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}.$$

Man unterscheide hier drei Fälle, je nachdem die Wurzeln x_1, x_2 der Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ reell und verschieden, komplex oder einander gleich sind.

Im Falle reeller Wurzeln ($b^2-ac>0$) findet man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$J = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}+C.$$

Im Falle komplexer Wurzeln ($b^2-ac<0$) schreibt man das Integral in der Form

$$J = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

Im Falle einer Doppelwurzel $x=-b:a$, ($ac-b^2=0$), wird

$$J = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2} = -\frac{1}{ax+b}+C.$$

5. $$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx = \int\left(\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}\right)dx$$
$$= 4\ln(x-1)-7\ln(x+3)+5\ln(x-4)+\ln C = \ln\left[\frac{C(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right].$$

6. $$\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx = \int\left\{\frac{13}{(x-4)^3}-\frac{3}{(x-4)^2}+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x-2}\right\}dx$$
$$= -\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\frac{C(x-4)}{x-2}.$$

7. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx = \int \left\{ \frac{11}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2} \right\} dx = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + C.$

8. $\int \frac{3x^2-37x+83}{(x-2)^3(x+5)}\,dx = \int \left\{ \frac{3}{(x-2)^3} - \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+5} \right\} dx$

$$= \frac{-3}{2(x-2)^2} + \frac{4}{x-2} + \ln \frac{C(x-2)}{x+5}.$$

9. $\int \frac{x^3-20x^2+36x-28}{(x-4)^3(x+3)}\,dx = \int \left\{ \frac{-20}{(x-4)^3} - \frac{8}{(x-4)^2} + \frac{1}{x+3} \right\} dx$

$$= \frac{10}{(x-4)^2} + \frac{8}{x-4} + \ln(x+3) + C.$$

10. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx = \int \left\{ \frac{-3}{(x-2)^3} + \frac{1}{x-5} \right\} dx = \frac{3}{2(x-2)^2}$

$$+ \ln(x-5) + C.$$

11. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx = \int \left\{ \frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right\} dx$

$$= -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

12. $\int \frac{x^4+5x^3-10x^2-8x+5}{(x-2)^3(x+3)^2}\,dx$

$$= \int \left\{ \frac{1}{5(x-2)^3} + \frac{42}{25(x-2)^2} + \frac{27}{25(x-2)} + \frac{23}{25(x+3)^2} - \frac{2}{25(x+3)} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{10(x-2)^2} - \frac{42}{25(x-2)} + \frac{27}{25}\ln(x-2) - \frac{23}{25(x+3)} - \frac{2}{25}\ln(x+3) + C.$$

13. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx = \int \frac{x^2-8x+7}{(x-5)^2(x+2)^2}\,dx$

$$= \int \left\{ -\frac{8}{49(x-5)^2} + \frac{30}{343(x-5)} + \frac{27}{49(x+2)^2} - \frac{30}{343(x+2)} \right\} dx$$

$$= \frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\ln\frac{x-5}{x+2} + C.$$

14. $\int \frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}\,dx = \int \left\{ \frac{15}{(x-3)^5} + \frac{10}{(x-3)^4} + \frac{1}{(x-3)^3} \right\} dx$

$$= \frac{-15}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2} + C.$$

15. $\int \frac{x^4-3x^2+8x-6}{(x-2)^5}\,dx$

$$= \int \left\{ \frac{14}{(x-2)^5} + \frac{28}{(x-2)^4} + \frac{21}{(x-2)^3} + \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} \right\} dx$$

$$= -\frac{7}{2(x-2)^4} - \frac{28}{3(x-2)^3} - \frac{21}{2(x-2)^2} - \frac{8}{x-2} + \ln(x-2) + C.$$

16. Man zeige, daß jedes über ein transzendentes Differential erstreckte Integral von der Form

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

wo f eine algebraische Funktion von $\sin x$ und $\cos x$ ist, durch die Substitution $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z$ in ein Integral eines algebraischen Differentials verwandelt werden kann.

Man findet

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

17. Die vorstehend erwähnte Substitution ist auf

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

anzuwenden. Hierbei zeigt sich, daß man zwei verschiedene Fälle unterscheiden muß, je nachdem $a - b$ und $a + b$ Zahlen von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Die genannte Substitution ergibt

$$J = \int \frac{2\,dz}{a + b + (a-b)z^2}.$$

A) $\frac{a-b}{a+b}$ sei > 0, etwa $= k^2$.

Hier wird

$$J = \frac{2}{a+b} \int \frac{dz}{1 + k^2 z^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$$

nach Aufg. 17, S. 79.

B) $\frac{a-b}{a+b}$ sei < 0, etwa $= -k^2$.

Hier wird

$$J = \frac{2}{a+b} \int \frac{dz}{1 - k^2 z^2} = -\frac{2}{a+b} \int \frac{dz}{(kz-1)(kz+1)}$$

$$= -\frac{1}{(a+b)k} \int \left(\frac{1}{z - \frac{1}{k}} - \frac{1}{z + \frac{1}{k}} \right) dz,$$

oder also

$$J = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{k \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{k \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}.$$

Die Fälle $a = b$ und $a = -b$ sind schon durch Aufg. 54 und 53, S. 93 erledigt.

18. $$\int \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}.$$

Aus dem Ergebnis von Aufg. 17 folgt für $1 + p^2 = a$, $-2p = b$ sofort

$$J = \frac{2}{1 - p^2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+p}{1-p} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

19. $$\int_0^\pi \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} = \frac{2}{p^2 - 1} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{p+1}{p-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{p^2 - 1},$$

wenn $p > 1$ ist.

Im Falle $p < 1$ wird $J = \frac{\pi}{1 - p^2}$; $p = 1$ führt auf Aufg. 53, S. 93.

20. $$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} \quad \text{auf} \quad \int \frac{dx}{a + b\cos x}$$

zurückzuführen.

Offenbar ist

$$J = \int \left\{\frac{1}{b} - \frac{a}{b(a + b\cos x)}\right\} dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b\cos x}.$$

21. $$\int \frac{a + \cos x}{1 + 2a\cos x + a^2}\, dx,$$

wobei $0 < a \leqq 1$ sei.

$$J = \int \frac{dx}{2a} + \frac{a^2 - 1}{2a} \int \frac{dx}{1 + 2a\cos x + a^2} = \frac{x}{2a} + \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-1}{a+1} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}x + \beta\right),$$

wenn $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-1}{a+1} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \beta$, $\frac{a-1}{a+1} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \beta$ gesetzt wird. Bei Anwendung des Additionstheorems für die Funktion arc tg (vgl. Aufg. 14, S. 78) erhält man

$$J = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\sin x}{1 + a\cos x}.$$

22. $$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}.$$

Dieses Integral führe man auf das in Aufg. 17, S. 115 behandelte Integral zurück, indem man $b = m\cos\alpha$, $c = m\sin\alpha$ setzt, während $m = \sqrt{b^2 + c^2}$ ist, wobei der Wurzel das Pluszeichen gegeben werden kann. Man erhält

$$J = \int \frac{dx}{a + m\cos(x - \alpha)}.$$

23.
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 - \frac{1}{6}\sin^2 x}.$$

Hier wird mit Hilfe von $2x = z$:

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{12\,dx}{11 + \cos 2x} = 6\int_0^{\pi} \frac{dz}{11 + \cos z} = \frac{12}{\sqrt{120}}\left[\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{10}{12}}\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{10}\pi\sqrt{30}.$$

24.
$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\,dx, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

$$J = \int \frac{x + \sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int 2\operatorname{arc\,tg} z\,dz + \int \frac{2z}{1 + z^2}\,dz = 2z\operatorname{arc\,tg} z = x\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Hieraus folgt leicht

$$\int \frac{x}{1 + \cos x}\,dx = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2}.$$

25. Ist f eine rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$, die sich nicht ändert, wenn man x durch $x + \pi$ ersetzt, so geht das Integral

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

durch die Substitution $\operatorname{tg} x = z$ (also nicht $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$ wie in Aufg. 16) in ein über eine rationale Funktion von z erstrecktes Integral über.[1]) Dies soll gezeigt werden.

Aus $\operatorname{tg} x = z$ folgt

$$\sin x = z : \sqrt{1 + z^2}, \quad \cos x = 1 : \sqrt{1 + z^2}, \quad dx = dz : (1 + z^2).$$

Die Funktion $f(\sin x, \cos x)$ geht durch die Substitution in einen Ausdruck von der Form

$$R + \frac{S}{\sqrt{1 + z^2}}$$

über, wo R und S rationale Funktionen von z sind. Wird nun x durch $x + \pi$ ersetzt, so bleibt $\operatorname{tg} x = z$ ungeändert, aber $\sin x$ und $\cos x$ ändern ihr Vorzeichen, also muß man auch bei $\sqrt{1 + z^2}$ das Vorzeichen ändern, man erhält

$$f(\sin(x + \pi), \cos(x + \pi))$$

---

1) Ch. Hermite, Cours professé, rédigé par Andoyer, 3. Aufl., Paris 1887, S. 13—14.

oder (nach Voraussetzung)

$$f(\sin x, \cos x) = R - \frac{S}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Da $f(\sin x, \cos x)$ schon gleich $R + \frac{S}{\sqrt{1+z^2}}$ war, folgt sofort

$$f(\sin x, \cos x) = R(z).$$

26. $$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x};$$

man wende die Substitution $\operatorname{tg} x = z$ an.

$$J = \int \frac{dz}{(a+bz)(1+z^2)}$$

geht durch Partialbruchzerlegung in

$$\int \left\{ \frac{a - bz}{(a^2+b^2)(1+z^2)} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)(a+bz)} \right\} dz$$

über; man findet leicht

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{a^2+b^2} \left\{ a \operatorname{arc\,tg} z - \frac{1}{2} b \ln(1+z^2) + b \ln(a+bz) \right\} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \left\{ ax - \frac{1}{2} b \ln \frac{1}{\cos^2 x} + b \ln \frac{a \cos x + b \sin x}{\cos x} \right\} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \{ ax + b \ln(a \cos x + b \sin x) \}. \end{aligned}$$

Das vorgelegte Integral läßt sich auch durch die Substitution $a = m \sin \alpha$, $b = m \cos \alpha$, $m = +\sqrt{a^2+b^2}$ erledigen; man erhält nämlich alsdann

$$J = \frac{1}{+\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{\cos x \, dx}{\sin(x+\alpha)},$$

woraus mit Hilfe von $x + \alpha = z$, $dx = dz$ der Ausdruck

$$J = \frac{1}{+\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{\cos z \cos \alpha + \sin z \sin \alpha}{\sin z} dz = \frac{1}{+\sqrt{a^2+b^2}} (\cos \alpha \ln \sin z + z \sin \alpha)$$

hervorgeht usw.

27. $$\int \frac{dx}{a + b \cot x} = \frac{1}{a^2+b^2} \{ ax - b \ln(a \sin x + b \cos x) \}.$$

28. $$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x};$$

man setze $\operatorname{tg} x = z$.

Hier wird $J = \int \frac{dz}{az^2 + 2bz + c}$, ein Integral, das schon in Aufg. 4, S. 113 behandelt wurde.

29. Man soll die Formeln beweisen:

$$\int \ln(a+bx^2)\,dx = x\ln(a+bx^2) - 2x + \frac{2a}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right),$$

$$\int \ln(a+bx^2)\,dx = x\ln(a+bx^2) - 2x + \frac{a}{\sqrt{-ab}}\ln\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}},$$

wo die untere oder obere Gleichung gilt, je nachdem a und b gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Für beide Fälle ergibt die Methode der teilweisen Integration

$$J = x\ln(a+bx^2) - 2b\int\frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = x\ln(a+bx^2) - 2b\int\left\{\frac{1}{b} - \frac{a}{b(a+bx^2)}\right\}dx$$
$$= x\ln(a+bx^2) - 2x + 2a\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

Das nun noch zu berechnende Integral wurde im wesentlichen schon in Aufg. 17, S. 79 behandelt.

30. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}{a^4\sin^2 x + b^4\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{a^2+b^2}.$$

Diese Formel soll bewiesen werden, indem man den Integranden mit Hilfe der Substitution $\operatorname{tg} x = z$ in eine rationale Funktion von z verwandelt und diese durch Partialbruchzerlegung integriert.

$$J = \int_0^\infty \frac{a^2z^2+b^2}{a^4z^2+b^4}\,\frac{dz}{1+z^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\int_0^\infty\frac{dz}{a^4z^2+b^4} + \frac{1}{a^2+b^2}\int_0^\infty\frac{dz}{1+z^2}$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{a^2+b^2}.$$

31. $$\int\frac{dx}{e^x - e^{-x}},\qquad e^x = z$$

$$J = \int\frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}.$$

Wäre der Nenner des Integranden $e^x + e^{-x}$, so würde man auf $\operatorname{arc\,tg} e^x$ geführt (vgl. Aufg 22, S. 79).

32. $$\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx,\qquad \sin x = z^2,$$

$$J = \int\frac{2z^2}{1-z^4}\,dz = \int\left\{\frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{1+z^2}\right\}dz$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sin x}.$$

33. Die Gleichungen (3), S. 109 und (9), S. 110 zeigen, daß die Integration einer rationalen Funktion $f(x):F(x)$, deren Nenner keine komplexen Faktoren enthält, wieder auf rationale Ausdrücke und außerdem im allgemeinen auf *Logarithmen* führt. Enthält $F(x)$ keine linearen, sondern nur mehrfache reelle Faktoren $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, ..., $(x-l)^\lambda$, so kann es vorkommen, daß einige logarithmische Glieder fehlen, vgl. z. B. Aufg. 11 und 14. Man soll untersuchen, wann dies eintritt.

Offenbar müssen die Koeffizienten A_α, B_β, ..., L_λ in Formel (9), S. 110 teilweise oder sämtlich verschwinden. Die Bemerkungen zu Gleichung (10), S. 111 zeigen, daß A_α mit $\varphi^{(\alpha-1)}(a)$ verschwindet. Analoges gilt für B_β: Setzt man $F(x) \equiv (x-b)^\beta F_2(x)$ und $\psi(x) = f(x) : F_2(x)$, so muß $\psi^{(\beta-1)}(b) = 0$ sein, wenn B_β verschwinden soll, usw.

34. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion, deren Grad kleiner als n ist, so erhält man

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{f(a)}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{f'(a)}{(n-2)(x-a)^{n-2}}$$
$$- \frac{f''(a)}{2!\,(n-3)(x-a)^{n-3}} - \frac{f'''(a)}{3!\,(n-4)(x-a)^{n-4}} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!\,(x-a)} + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \ln(x-a) + C.$$

Dies soll bewiesen werden.

Die Partialbruchzerlegung des Integranden ergibt nach Regel **3**:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{2!\,(x-a)^{n-2}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!\,(x-a)^2} + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!\,(x-a)}.$$

35. Man berechne hiernach

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 - 2x + 1}{(x-3)^5}\,dx.$$

$$J = -\frac{10}{(x-3)^4} - \frac{82}{3\,(x-3)^3} - \frac{25}{(x-3)^2} - \frac{12}{x-3} + \ln(x-3) + C.$$

36. Nimmt die ganze Funktion $f(x)$, deren Grad $\leqq n-1$ sei, für $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ die Werte $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ an, so läßt sich $f(x)$ in der folgenden Form darstellen:

$$(1)\quad f(x) = \sum_1^n {}_k\, f(x_k) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Diese Formel soll unter Benutzung von Regel **1**, S. 108 f. bewiesen werden.

Nach (3) in Regel **1** ist

$$f(x) = F(x) \cdot \sum_1^n {}^k \frac{A_k}{x - x_k},$$

wobei

$$F(x) \equiv c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad A_k = f(x_k) : F'(x_k);$$

daher wird

$$f(x) = \sum_1^n {}^k f(x_k) \frac{F(x)}{(x - x_k) F'(x_k)}.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{F(x)}{(x - x_k)} = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

und

$$F'(x_k) = c(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

erhält man die zu beweisende Formel.

Setzt man $f(x) = y$, $f(x_k) = y_k$, so stellt

$$(2) \qquad y = \sum_1^n {}^k y_k \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

die Gleichung einer Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, die durch n gegebene Punkte mit den Koordinaten x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ geht. Dies ist sofort ersichtlich, denn für $x = x_k$ reduziert sich die Gleichung (2) auf $y = y_k$.

Die Anordnung der rechten Seite von (1) oder (2) nach Potenzen von x liefert eine Gleichung von der Form $y = g(x)$, wo $g(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellt; Kurven, deren Gleichungen eine solche Gestalt haben, bezeichnet man als Parabeln höherer (hier $(n-1)^{\text{ter}}$) Ordnung; vgl. auch Aufg. 28, S. 8.

Die zuerst von Lagrange[1]) aufgestellte Formel (2) wird in *zweifacher* Weise angewandt. Wenn man, z. B. auf Grund von Experimenten, weiß, daß den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eines Bereiches der Veränderlichen x gewisse Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einer Veränderlichen y entsprechen und wenn man glaubt, die allgemeine Abhängigkeit der Größe y von x durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$, wo $f(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, wenigstens angenähert darstellen zu dürfen, so kann man hierzu die Formel (2) verwenden. Mit ihrer Hilfe kann man für beliebige andere Werte von x des Bereiches die zugehörigen y aus-

1) J. L. Lagrange im Journal de l'École Polytechnique, Bd. 2, cah. 8 (1812), S. 276f.; Oeuvres, éd. par J. A. Serret, Bd. 7, Paris 1877, S. 285f.

rechnen oder *einschalten*, und da dieses Verfahren als Interpolation bezeichnet wird, heißt die Formel (2) die *Interpolationsformel von Lagrange*. Ob sich nun gerade eine ganze Funktion am besten für die Berechnung der zu interpolierenden Werte y eignet, wie soeben angenommen wurde, ist eine andere Frage; es kann sehr wohl Fälle geben, wo eine gebrochene rationale Funktion oder eine Exponentialfunktion oder eine periodische Funktion (z. B. trigonometrische Reihe) den gewünschten Zweck besser erfüllt.

Eine andere Art von Anwendung der Formel (1) oder (2) ist folgende: Eine Funktion $f(x)$, die aber nun keineswegs eine ganze Funktion sein muß, sondern vielleicht einen recht komplizierten Bau aufweist, aber innerhalb eines gewissen Intervalles eindeutig, endlich und stetig ist, sei gegeben; man weiß überdies, daß sie für die Werte $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Intervalles die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt. Es fragt sich nun, ob vielleicht auch bei anderen Werten von x, die dem Intervall angehören, die Gleichung (1) eine genügende Annäherung an die Funktion $f(x)$ darstellt.

Zur Beantwortung dieser Frage werde zunächst die rechte Seite von (1) durch $G(x)$ bezeichnet. Die Gleichung $f(x) = G(x)$ ist alsdann allgemein nicht streng, sondern nur angenähert richtig; wirklich erfüllt wird sie allerdings durch die Werte $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es handelt sich nun darum den Fehler abzuschätzen, der bei allgemeiner Anwendung dieser Formel gemacht wird. Jedenfalls kann man streng richtig

$$f(x) = G(x) + R(x) \tag{3}$$

setzen, wo $R(x)$ ein unbekanntes Restglied bedeutet, das für die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von x verschwinden muß, so daß man die Gleichung (3) durch

$$f(x) = G(x) + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)\, r(x) \tag{4}$$

ersetzen kann.

Hier ist nun der Fehler $r(x)$ abzuschätzen.[1] Dies geschieht auf Grund eines von dem französischen Geometer M. Rolle stammenden Satzes, der in moderner Ausdrucksweise lautet: Es sei $y = f(z)$ eine Funktion, die innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches B eindeutig, endlich und stetig ist und innerhalb B an jeder Stelle eine bestimmte erste Ableitung hat. Verschwindet diese Funktion für die Werte $z = a$ und $z = b$ des Bereiches B, so gibt es zwischen a und b mindestens einen Wert $z = \zeta$, für den die erste Ableitung $f'(\zeta)$ gleich Null

1) Vgl. hierzu A. A. Markoff, Differenzenrechnung, deutsche Übersetzung von Th. Friesendorff und E. Prümm, Leipzig 1896, S. 6—8; ferner F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, autogr. Vorlesung, ausgearbeitet von C. Müller, Leipzig 1902, S. 109 ff.

ist. Hieraus folgt weiter, wenn die Funktion mindestens n mal differenzierbar ist:

Verschwindet die Funktion $y = f(z)$ für $n+1$ Werte eines gewissen Intervalles der Veränderlichen z, so hat die Gleichung $f'(z) = 0$ mindestens n Wurzeln, die diesem Intervalle angehören; die Gleichung $f''(z) = 0$ hat mindestens $n-1$ solche Wurzeln, die Gleichung $f^{(n)}(z) = 0$ mindestens eine.

Diese letzte Bemerkung wendet man nun an auf die Funktion

$$\Phi(z) = f(z) - G(z) - (z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n)\, r(x), \tag{5}$$

die nach (4) für die $n+1$ Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und x der Veränderlichen z verschwindet. Hier ist $G(z)$ nach (1) eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, deren n^{te} nach z genommene Ableitung somit verschwindet, und das Produkt $(z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_n)$ hat $n!$ zur n^{ten} Ableitung. Daher wird

$$\Phi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - n!\, r(x),$$

und mit Rücksicht darauf, daß diese Funktion mindestens für einen, allerdings unbekannten, dem oben erwähnten Intervall angehörigen Wert $z = \zeta$ verschwindet, folgt

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}, \tag{6}$$

somit nach (4):

$$f(x) = G(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{n!} f^{(n)}(\zeta). \tag{7}$$

Sobald das Restglied hinreichend klein ist, kann die Funktion $f(x)$ durch $G(x)$ ersetzt werden, und zwar natürlich auch außerhalb des Bereiches der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sie kann daher auch zur „Extrapolation" dienen.

B) Der Nenner der rationalen Funktion hat auch komplexe Faktoren.

Beispiele.

1. $$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2},$$

vgl. Aufg. 17, S. 79.

2. $$\int \frac{x-5}{(x^2 - 8x + 20)(x-3)}\, dx = \int \left\{ \frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{20} i}{x - 4 - 2i} + \frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{20} i}{x - 4 + 2i} - \frac{2}{5(x-3)} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{5} \ln(x^2 - 8x + 20) + \frac{3}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-4}{2} - \frac{2}{5} \ln(x-3).$$

3. $$\int \frac{5x-8}{(x^2-8x+25)(x-2)}\,dx = \int \left\{ \frac{-\frac{1}{13}-\frac{23}{26}i}{x-4-3i} + \frac{-\frac{1}{13}+\frac{23}{26}i}{x-4+3i} + \frac{2}{13(x-2)} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{13}\ln(x^2-8x+25) + \frac{23}{13}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-4}{3} + \frac{2}{13}\ln(x-2).$$

4. $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

nach Formel (15), S. 112 zu berechnen.

$$J = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x(5+3x^2)}{8(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Dieselbe Aufgabe mit der Substitution $x = \operatorname{tg} z$ zu lösen.

5. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n},$$

wo n eine ganze positive Zahl sei.

Man benutze die Substitution $x = a \operatorname{tg} z$. Alsdann folgt

$$J = \frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n-2} z\,dz = \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

nach Aufg. 76, S. 99.

6. $$\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx.$$

Hier ergibt die Methode der Koeffizientenvergleichung

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2} + \frac{5}{x^2-6x+13};$$

da ferner $x^2-6x+13 = (x-3)^2+4$ ist, hat man nach Regel **4**, S. 111f. eine neue Veränderliche z durch $x-3 = 2z$ einzuführen und erhält alsdann

$$J = \int \frac{60z+13}{8(1+z^2)^2}\,dz + \frac{5}{2}\int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{15}{2}\int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} + \frac{13}{8}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} + \frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg} z$$

$$= -\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{1+z^2} + \frac{13}{8}\left\{\frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z\right\} + \frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg} z$$

$$= \frac{-15}{x^2-6x+13} + \frac{13(x-3)}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}$$

$$= \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}.$$

7. Man führe $\int \frac{x^m}{(a+bx^2)^n}dx$, wo m eine beliebige ganze Zahl, n eine positive ganze Zahl sei, während a und b beliebige Zahlen von gleichem Vorzeichen sind, durch die Substitution $bx^2 = a\,\mathrm{tg}^2 z$ in eins der in Aufg. 80, S. 101 betrachteten Integrale über.

Hier ist

$$dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{dz}{\cos^2 z}, \quad a + bx^2 = a(1+\mathrm{tg}^2 z) = \frac{a}{\cos^2 z},$$

daher

$$J = \frac{1}{a^n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\int \sin^m z\cdot(\cos z)^{2n-m-2}\cdot dz.$$

8. Dasselbe Integral, bei dem aber m nun eine ungerade ganze positive Zahl sei, etwa $m = 2k+1$, durch die Substitution $a + bx^2 = z$ zu erledigen.

Nun wird $J = \frac{1}{2b^{k+1}}\int\frac{(z-a)^k}{z^n}dz$; der Zähler des Integranden ist nach dem binomischen Satze zu entwickeln, und nach Division eines jeden Gliedes dieser Entwicklung durch z^n kann die gliedweise Integration erfolgen. Hier dürfen die Zahlen a und b auch ungleiche Vorzeichen haben.

9. Für den Fall, daß in dem Integral von Aufg. 7 der Exponent m eine gerade ganze positive Zahl, etwa $m = 2k$, ist, leite man die Rekursionsformel ab:

$$\int\frac{x^{2k}}{(a+bx^2)^n}dx = -\frac{x^{2k-1}}{(2n-2k-1)b(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{(2k-1)a}{(2n-2k-1)b}\int\frac{x^{2k-2}}{(a+bx^2)^n}dx.$$

Offenbar ist

$$J = \int\frac{x^{2k-2}(a+bx^2-a)}{b(a+bx^2)^n}dx = \frac{1}{b}\int\frac{x^{2k-2}}{(a+bx^2)^{n-1}}dx - \frac{a}{b}\int\frac{x^{2k-2}}{(a+bx^2)^n}dx$$
$$= \frac{1}{b}J_1 - \frac{a}{b}J_2.$$

Nun kann aber $J_1 = \int\frac{x^{2k-2}dx}{(a+bx^2)^{n-1}}$ durch $\frac{1}{2k-1}\int\frac{dx^{2k-1}}{dx}\cdot\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}$ ersetzt werden, woraus bei Anwendung der Methode der teilweisen Integration

$$J_1 = \frac{1}{2k-1}\left\{\frac{x^{2k-1}}{(a+bx^2)^{n-1}} + 2(n-1)b\int\frac{x^{2k}}{(a+bx^2)^n}dx\right\}$$

hervorgeht, so daß

$$\int \frac{x^{2k}}{(a+bx^2)^n}\,dx = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,b\,(a+bx^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{2k-1}\int \frac{x^{2k}}{(a+bx^2)^n}\,dx - \frac{a}{b}\int \frac{x^{2k-2}}{(a+bx^2)^n}\,dx$$

folgt. Die gewünschte Rekursionsformel ergibt sich durch Vereinigung der an zwei verschiedenen Stellen dieser Gleichung auftretenden Integrale J.

Natürlich kann man auch für *den* Fall eine Rekursionsformel ableiten, daß in dem Integral von Aufg. 7 der Exponent m eine ungerade ganze positive Zahl ist; aber man wird in diesem Fall besser das in Aufg. 8 oder bei gleichem Vorzeichen von a und b das in Aufg. 7 angegebene Verfahren anwenden.

10. $\int \frac{x^5}{(3+2x^2)^3}\,dx$ nach den in Aufg. 8 und 7 angegebenen Methoden zu berechnen.

Die Substitution $3+2x^2=z$ (vgl. Aufg. 8) ergibt

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16}\int \frac{(z-3)^2}{z^3}\,dz = \frac{1}{16}\left(\ln z + \frac{6}{z} - \frac{9}{2z^2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left\{\ln(3+2x^2) + \frac{6}{3+2x^2} - \frac{9}{2(3+2x^2)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{16}\left\{\ln(3+2x^2) + \frac{3(9+8x^2)}{2(3+2x^2)^2}\right\}. \end{aligned}$$

Die Substitution $2x^2 = 3\,\mathrm{tg}^2 z$, $4x\,dx = \frac{6\,\mathrm{tg}\,z}{\cos^2 z}\,dz$ ergibt

$$J = \frac{1}{8}\int \frac{\sin^5 z}{\cos z}\,dz,$$

woraus mit Hilfe der Formel (4) in Aufg. 80, S. 101

$$8J = -\frac{1}{4}\sin^4 z + \int \frac{\sin^3 z}{\cos z}\,dz$$

hervorgeht, und wenn man die Formel nochmals anwendet,

$$8J = -\frac{1}{4}\sin^4 z - \frac{1}{2}\sin^2 z - \ln\cos z.$$

Nun ist $\mathrm{tg}^2 z = \frac{2}{3}x^2$, $\sin^2 z = \frac{2x^2}{3+2x^2}$, $\cos^2 z = \frac{3}{3+2x^2}$; mit Rücksicht auf $\ln\cos z = \frac{1}{2}\ln\cos^2 z$ ergibt sich

$$J = \frac{1}{16}\left\{\ln(3+2x^2) - \frac{6x^2(1+x^2)}{(3+2x^2)^2}\right\}.$$

Dieser Wert des Integrals scheint von dem vorhin gefundenen wesentlich verschieden zu sein, tatsächlich unterscheiden sich beide nur durch eine additive Konstante. Addiert man nämlich bei dem soeben gefundenen Wert zu dem letzten Glied der Klammer die Zahl $\frac{3}{2}$ und macht dann die beiden Glieder gleichnamig, so folgt der zuerst angegebene Wert des Integrals.

11. $$\int \frac{x^3}{(7-4x^2)^2}\,dx.$$

Die Substitution $7-4x^2=z$, $x\,dx=-\frac{1}{8}dz$ ergibt

$$J=\frac{1}{32}\int\frac{z-7}{z^2}\,dz=\frac{1}{32}\left(\ln z+\frac{7}{z}\right)=\frac{1}{32}\left\{\ln(7-4x^2)+\frac{7}{7-4x^2}\right\}.$$

12. $$\int \frac{x^4}{(4-x^2)^2}\,dx.$$

Die Anwendung der Rekursionsformel in Aufg. 9 ergibt

$$J=\frac{x^3}{x^2-4}+12\int\frac{x^2}{(4-x^2)^2}\,dx,$$

woraus mit Hilfe derselben Formel

$$J=\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{12x}{x^2-4}-48\int\frac{dx}{(x^2-4)^2}$$

hervorgeht. Das noch übrigbleibende Integral ist nach der in Regel **3**, S. 110 entwickelten Methode der Partialbruchzerlegung zu behandeln. Man findet

$$\frac{1}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{2(x+2)}\right\},$$

daher

$$J=\frac{x^3-12x}{x^2-4}-3\left\{\frac{-1}{x-2}-\frac{1}{2}\ln(x-2)-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\ln(x+2)\right\}$$
$$=\frac{6x-x^3}{4-x^2}+\frac{3}{2}\ln\frac{x-2}{x+2}.$$

13. Die in Aufg. 7 und 9 abgeleiteten Methoden sind anzuwenden auf das Beispiel

$$\int\frac{x^4}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Die Substitution $x=\operatorname{tg} z$ ergibt

$$J=\int\sin^4 z\,dz=-\frac{1}{4}\sin^3 z\cos z-\frac{3}{8}\sin z\cos z+\frac{3}{8}z\ \text{(n. Aufg. 73, S. 98)}$$
$$=-\frac{1}{4}\,\frac{x^3}{(1+x^2)^2}-\frac{3}{8}\,\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x=-\frac{x(3+5x^2)}{8(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Nach der in Aufg. 9 abgeleiteten Rekursionsformel ergibt sich

$$J = -\frac{x^3}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx,$$

und wenn man die Formeln nochmals anwendet, folgt

$$J = -\frac{x^3}{(1+x^2)^2} + 3\left\{-\frac{x}{3(1+x^2)^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}\right\}.$$

Das noch übrig bleibende Integral wurde schon in Aufg. 4, S. 124 bestimmt. Man findet schließlich

$$J = \frac{x}{4(1+x^2)^2} - \frac{5}{8}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x = -\frac{x(3+5x^2)}{8(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

14. $$\int \frac{x^6}{(4+3x^2)^3}\,dx.$$

Die Substitution

$$3x^2 = 4\operatorname{tg}^2 z, \quad dx = \sqrt{\frac{4}{3}}\,\frac{dz}{\cos^2 z}$$

ergibt

$$J = \frac{2\sqrt{3}}{81}\int\frac{\sin^6 z}{\cos^2 z}\,dz,$$

woraus mit Hilfe der Formel (2) in Aufg. 80, S. 101

$$J = \frac{2\sqrt{3}}{81}\left\{\frac{\sin^5 z}{\cos z} - 5\int \sin^4 z\,dz\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{81}\left\{\frac{\sin^5 z}{\cos z} + \frac{5}{4}\sin^3 z\cos z + \frac{15}{8}\sin z\cos z - \frac{15}{8}z\right\}$$

hervorgeht. Bei Einführung von

$$\sin z = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{4+3x^2}}, \quad \cos z = \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}}$$

folgt

$$J = \frac{2\sqrt{3}}{81}\left\{\frac{9\sqrt{3}\,x^5}{2(4+3x^2)^2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\,\frac{x^3}{(4+3x^2)^2} + \frac{15x\sqrt{3}}{4(4+3x^2)} - \frac{15}{8}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{x^3(5+3x^2)}{9(4+3x^2)^2} + \frac{5x}{18(4+3x^2)} - \frac{5\sqrt{3}}{108}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{18}\left\{\frac{6x^5+25x^3+20x}{(4+3x^2)^2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)\right\}.$$

15. $\int\frac{dx}{x^m(a+bx^2)^n}$, wo m und n ganze positive Zahlen sind, soll durch die Substitution $x = 1:z$ auf das in Aufg. 7, 8 und 9 behandelte Integral zurückgeführt werden.

Man findet

$$J = -\int \frac{z^{m+2n-2}}{(az^2+b)^n} dz.$$

Ein Beispiel hierzu ist

16. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)^4}.$$

Die Substitution $x = \frac{1}{z}$ ergibt $J = -\int \frac{z^9}{(az^2+b)^4} dz$, woraus nach Aufg. 8 mit Hilfe von $az^2 + b = u$, $z\,dz = \frac{1}{2a} du$ das Integral

$$J = -\frac{1}{2a^5}\int \frac{(u-b)^4}{u^4} du$$

hervorgeht. Man findet

$$J = \frac{1}{2a^5}\left\{\frac{b^4}{3u^3} - \frac{2b^3}{u^2} + \frac{6b^2}{u} - u + 4b\ln u\right\}$$

und nach Einführung von $u = az^2 + b = (a + bx^2) : x^2$ folgt

$$J = \frac{1}{2a^5}\left\{\frac{b^4x^6}{3(a+bx^2)^3} - \frac{2b^3x^4}{(a+bx^2)^2} + \frac{6b^2x^2}{a+bx^2} - \frac{a+bx^2}{x^2} + 4b\ln\frac{a+bx^2}{x^2}\right\}.$$

17. Man soll

$$\int \frac{dx}{x^n - 1}$$

berechnen und hierbei die zwei Fälle unterscheiden, wo n eine gerade bzw. ungerade ganze positive Zahl ist. Bei der hier vorkommenden Partialbruchzerlegung ist zu beachten, daß die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ von der Form

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

sind. Bei *geradem* n ergeben sich die Wurzeln $+1$ und -1 für $k = 0$ bzw. $k = \frac{1}{2}n$. Die einzelnen konjugiert komplexen Wurzelpaare erhält man für $k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-2)$ Bei *ungeradem* n liefert $k = 0$ die Wurzel $x = 1$; die einzelnen Paare konjugiert komplexer Wurzeln erhält man für $k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$. Wir setzen dies als bekannt voraus.

Die Wurzel $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ gibt mit der zugehörigen konjugiert komplexen Wurzel $\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{\varepsilon_k} = \varepsilon_k^{n-1}$ nach Regel **2**, S. 109 Anlaß zu der Summe der beiden Partialbrüche

$$s_k = \frac{A_k + iB_k}{x - \varepsilon_k} + \frac{A_k - iB_k}{x - \varepsilon_k^{n-1}},$$

wo $A_k + iB_k$ nach Regel **1**, S. 109 gleich

$$\frac{1}{n\,\varepsilon_k^{\,n-1}} = \frac{\varepsilon_k}{n}$$

ist,

$$A_k - iB_k = \frac{\varepsilon_k^{\,n-1}}{n}.$$

Bei Berücksichtigung dieser Werte folgt

$$s_k = \frac{1}{n}\,\frac{x(\varepsilon_k + \varepsilon_k^{\,n-1}) - 2}{x^2 - (\varepsilon_k + \varepsilon_k^{\,n-1})x + 1} = \frac{2}{n}\,\frac{x\cos\frac{2k\pi}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1},$$

das zur Summe s_k gehörige Integral wird daher

$$\int s_k\,dx = J_k = \frac{1}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\int\frac{2x\,dx}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1} - \frac{2}{n}\int\frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}$$

oder

$$J_k = \frac{1}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\int\frac{2x - 2\cos\frac{2k\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}\,dx - \frac{2}{n}\int\frac{1 - \cos^2\frac{2k\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1}\,dx.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist nach Aufg. 8, S. 50 gleich

$$\frac{1}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right),$$

das zweite läßt sich in der Form

$$-\frac{2}{n}\cdot\sin^2\frac{2k\pi}{n}\int\frac{dx}{\left(x - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}}$$

schreiben und führt mit Hilfe der Substitution $x - \cos\frac{2k\pi}{n} = z\sin\frac{2k\pi}{n}$ auf

$$-\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\operatorname{arc\,tg} z = -\frac{2}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}.$$

So findet man

$$J_k = \int s_k\,dx = \frac{1}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) - \frac{2}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}.$$

Weiterhin sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es sei n eine *gerade* Zahl, $n = 2\nu$.

Man erhält alsdann die reellen Wurzeln $x = +1$ und $x = -1$ der Gleichung $x^n - 1 = 0$, wenn man in

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{k\pi}{\nu} \pm i \sin\frac{k\pi}{\nu}$$

die Größe k gleich 0 bzw. gleich ν setzt. Um *sämtliche* Wurzeln der Gleichung zu erhalten, muß man, wie früher bemerkt wurde, der Zahl k die Werte von 0 bis $\frac{1}{2}n = \nu$ erteilen; $k = 0$ und $k = \nu$ wurde soeben berücksichtigt, die komplexen Wurzelpaare ergeben sich für $k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Die reellen Wurzeln $x = \pm 1$ geben bei $\frac{1}{x^n - 1}$ Anlaß zu den Partialbrüchen $\frac{1}{n}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{n}\frac{1}{x+1}$, das zugehörige Integral wird $\frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2\nu}\ln\frac{x-1}{x+1}$. Aus diesen Betrachtungen folgt im Falle $n = 2\nu$:

$$\int\frac{dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{n}\sum_{1}^{\nu-1}{}_k \cos\frac{k\pi}{\nu}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{\nu} + 1\right)$$

$$- \frac{2}{n}\sum_{1}^{\nu-1}{}_k \sin\frac{k\pi}{\nu}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\frac{k\pi}{\nu}}{\sin\frac{k\pi}{\nu}}.$$

b) Es sei nun n eine *ungerade* Zahl, $n = 2\nu + 1$.

Die einzige reelle Wurzel $x = 1$ der Gleichung $x^n - 1 = 0$ ergibt sich aus $x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$, wenn $k = 0$ gesetzt wird. Um *sämtliche* Wurzeln der Gleichung zu erhalten, muß man, wie schon bemerkt wurde, der Zahl k die Werte von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1) = \nu$ geben; $k = 0$ wurde soeben berücksichtigt, die komplexen Wurzelpaare ergeben sich für $k = 1, 2, \ldots \nu$. Die reelle Wurzel $x = 1$ gibt bei $\frac{1}{x^n - 1}$ Anlaß zu dem Partialbruch $\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}$, das zugehörige Integral wird $\frac{1}{n}\ln(x-1)$. Aus diesen Betrachtungen folgt im Falle $n = 2\nu + 1$:

$$\int\frac{dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\ln(x-1) + \frac{1}{n}\sum_{1}^{\nu}{}_k \cos\frac{2k\pi}{2\nu+1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2\nu+1} + 1\right)$$

$$- \frac{2}{n}\sum_{1}^{\nu}{}_k \sin\frac{2k\pi}{2\nu+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\frac{2k\pi}{2\nu+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2\nu+1}}.$$

18. Man soll

$$\int\frac{dx}{x^n + 1}$$

berechnen und hierbei die zwei Fälle unterscheiden, wo n eine gerade bzw. ungerade ganze positive Zahl ist. Bei der hier vorkommenden Partialbruchzerlegung ist zu beachten, daß die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$ von der Form

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

sind. Um die einzelnen konjugierten Wurzelpaare zu erhalten, hat man der Zahl $2k+1$ im Falle eines geraden n alle ungeraden Werte von 1 bis $n-1$ zu geben, oder der Zahl k die Werte $0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-2)$. Im Falle eines ungeraden n erhält man die einzige reelle Wurzel $x = -1$ für $2k+1 = n$, während sich die komplexen Wurzelpaare ergeben, wenn $2k+1$ alle ungeraden Zahlen von 1 bis $n-2$ durchläuft, d. h. wenn $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$ gesetzt wird.

Die Wurzel

$$\varrho_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

gibt mit der zugehörigen konjugiert komplexen Wurzel

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = \frac{1}{\varrho_k} = -\varrho_k^{n-1}$$

nach Regel **2**, S. 109 Anlaß zu der Summe der beiden Partialbrüche

$$s_k = \frac{A_k + iB_k}{x - \varrho_k} + \frac{A_k - iB_k}{x + \varrho_k^{n-1}},$$

wo $A_k + iB_k$ nach Regel **1**, S. 109 gleich

$$\frac{1}{n\varrho_k^{n-1}} = -\frac{1}{n}\varrho_k$$

ist,

$$A_k - iB_k = -\frac{1}{n\varrho_k} = \frac{1}{n}\varrho_k^{n-1}.$$

Bei Berücksichtigung dieser Werte folgt

$$s_k = \frac{1}{n}\,\frac{x(\varrho_k^{n-1} - \varrho_k) + 2}{x^2 + x(\varrho_k^{n-1} - \varrho_k) + 1} = -\frac{2}{n}\,\frac{x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1},$$

das zugehörige Integral wird

$$\int s_k\,dx = J_k = -\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\int\frac{2x\,dx}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1} + \frac{2}{n}\int\frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1}$$

oder

$$J_k = -\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\int\frac{2x - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1}\,dx + \frac{2}{n}\int\frac{1 - \cos^2\frac{(2k+1)\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1}\,dx.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist nach Aufg. 8, S. 50 gleich

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+1\right),$$

das zweite wird gleich

$$\frac{2}{n}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad \text{(vgl. Aufg. 17, S. 130).}$$

So findet man:

$$J_k=-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+1\right)$$
$$+\frac{2}{n}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}.$$

Es sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es sei n eine *gerade* Zahl, $n = 2\nu$.

Die Gleichung $x^n + 1 = 0$ hat in diesem Falle keine einzige reelle Wurzel, die komplexen Wurzelpaare ergeben sich, wie schon bemerkt wurde, wenn man in

$$x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-2)$ setzt, wo $\frac{1}{2}(n-2) = \nu - 1$ ist. Hieraus folgt im Falle $n = 2\nu$:

$$\int\frac{dx}{x^n+1}=-\frac{1}{n}\sum_{0}^{\nu-1}{}^{k}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+1\right)$$
$$+\frac{2}{n}\sum_{0}^{\nu-1}{}^{k}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}.$$

b) Es sei n eine *ungerade* Zahl, $n = 2\nu + 1$.

Die einzige reelle Wurzel $x = -1$ der Gleichung $x^n + 1 = 0$ ergibt sich, wenn man in $x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ die Größe $2k + 1 = n$ setzt; die komplexen Wurzelpaare erhält man, wie schon bemerkt wurde, für $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$, wo $\frac{1}{2}(n-3) = \nu - 1$ ist. Die reelle Wurzel $x = -1$ gibt bei $\frac{1}{x^n+1}$ Anlaß zu dem Partial-

bruch $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x+1}$, das zugehörige Integral wird $\frac{1}{n} \ln(x+1)$. Aus diesen Betrachtungen folgt im Falle $n = 2\nu + 1$:

$$\int \frac{dx}{x^n+1} = \frac{1}{n} \ln(x+1) - \frac{1}{n} \sum_{0}^{\nu-1}{}_k \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)$$

$$+ \frac{2}{n} \sum_{0}^{\nu-1}{}_k \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}.$$

Beispiele zu Aufg. 17 und 18.

19. $$\int \frac{dx}{x^3-1}.$$

$$J = \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{3} + 1\right)$$

$$- \frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)$$

$$- \frac{1}{3}\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

20. $$\int \frac{x\,dx}{x^3-1}.$$

$$J = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

21. $$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

22. $$\int \frac{dx}{x^6-1}.$$

$$J = \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{12}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Hier läßt sich der Klammerfaktor bei $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ mit Hilfe des Additionstheorems der Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$ kürzer ausdrücken (vgl. Aufg. 14, S. 78). Man erhält alsdann

$$J = \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{12}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

23. $$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

24. $$\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

$$J = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1)\right\}.$$

Ähnlich wie bei Aufg. 22 läßt sich der Klammerfaktor bei $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ in $\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$ zusammenfassen.

25. $$\int \frac{x^2}{x^4 + 1}\,dx.$$

$$J = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} - 1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2} + 1)\right\}$$

$$J = \frac{1}{8}\sqrt{2}\left\{\ln\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right\}.$$

Auf dieses Integral wird man auch bei $\int\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$ geführt, denn die Substitution $\operatorname{tg} x = z^2$ ergibt

$$\int\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = 2\int\frac{z^2}{z^4 + 1}\,dz.$$

26. $$\int\frac{dx}{x^6 + 1}.$$

$$J = \frac{1}{12}\sqrt{3}\ln\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$+ \frac{1}{6}\left\{\operatorname{arc\,tg}(2x - \sqrt{3}) + \operatorname{arc\,tg}(2x + \sqrt{3})\right\}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{3}\ln\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(1 - x^2)}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

27. $$\int\frac{x^3 + 5x^2 - 3}{x^6 - 1}\,dx.$$

Hier ist

$$J = \int\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{6}\,\frac{14x - 13}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\,\frac{4x + 3}{x^2 + x + 1}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x - 1)^3}{x + 1} - \frac{1}{6}\int\frac{14x - 7}{x^2 - x + 1}\,dx + \frac{1}{6}\int\frac{6}{x^2 - x + 1}\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int\frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x - 1)^3}{x + 1} - \frac{7}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

28. Wie läßt sich $\int \frac{dx}{x^n \mp a}$, wo a eine positive Zahl sei, auf $\int \frac{dx}{x^n \mp 1}$ zurückführen?

Man setzt $a = b^n$, $x = bz$ und erhält

$$\frac{1}{b^{n-1}} \int \frac{dz}{z^n \mp 1} = \frac{\sqrt[n]{a}}{a} \int \frac{dz}{z^n \mp 1}.$$

29. $$\int \frac{x^2 dx}{x^5 - 8}.$$

Die Substitution $x = z\sqrt[5]{8}$ ergibt

$$J = \frac{1}{8} \sqrt[5]{8^3} \int \frac{z^2}{z^5 - 1} dz$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt[5]{8^3} \int \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{z-1} - 2\cos\frac{\pi}{5} \frac{z-1}{z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1} + 2\cos\frac{2\pi}{5} \frac{z-1}{z^2 + 2z\cos\frac{\pi}{5} + 1} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{40} \sqrt[5]{8^3} \left\{ \ln(z-1) - \cos\frac{\pi}{5} \ln\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right) + 2\sin\frac{\pi}{5} \operatorname{arctg} \frac{z - \cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \right.$$

$$\left. + \cos\frac{2\pi}{5} \ln\left(z^2 + 2z\cos\frac{\pi}{5} + 1\right) - 2\sin\frac{2\pi}{5} \operatorname{arctg} \frac{z + \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} \right\},$$

und hier ist noch z durch $x : \sqrt[5]{8}$ zu ersetzen.

30. $$\int \frac{x^m}{1 + x^{2n}} dx,$$

wo m, n ganze positive Zahlen seien und $m < 2n$.

Die Summe der durch die Wurzel

$$\varrho_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{2n}\pi$$

der Gleichung $x^{2n} + 1 = 0$ und die konjugiert komplexe Wurzel $1 : \varrho_k$ veranlaßten Partialbrüche der Zerlegung von $x^m : (1 + x^{2n})$ wird

$$s_k = \frac{A_k + iB_k}{x - \varrho_k} + \frac{A_k - iB_k}{x - \frac{1}{\varrho_k}},$$

wo $A_k + iB_k$ nach Regel **1**, S. 109 gleich

$$\frac{\varrho_k^{\,m}}{2n\varrho_k^{\,2n-1}} = -\frac{1}{2n}\varrho_k^{\,m+1},$$

$$A_k - iB_k = -\frac{1}{2n\varrho_k^{\,m+1}}$$

ist. Mit Hilfe dieser Werte wird

$$s_k = -\frac{1}{2n}\left\{\frac{\varrho_k^{m+1}}{x-\varrho_k} + \frac{1}{\varrho_k^{m+1}\left(x-\frac{1}{\varrho_k}\right)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2n}\frac{x\left(\varrho_k^{m+1}+\frac{1}{\varrho_k^{m+1}}\right)-\left(\varrho_k^{m}+\frac{1}{\varrho_k^{m}}\right)}{x^2 - x\left(\varrho_k+\frac{1}{\varrho_k}\right)+1}$$

$$= -\frac{1}{2n}\frac{2x\cos\frac{(2k+1)(m+1)}{2n}\pi - 2\cos\frac{(2k+1)m}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1},$$

daher

$$J_k = \int s_k\,dx$$

$$= -\frac{1}{2n}\int\frac{\cos\frac{(2k+1)(m+1)}{2n}\pi\left\{2x-2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right\}-2\sin\frac{(2k+1)(m+1)}{2n}\pi\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2n}\cos\frac{(2k+1)(m+1)}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sin\frac{(2k+1)(m+1)}{2n}\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}.$$

Der gesuchte Wert J des vorgelegten Integrals geht aus J_k durch Summieren in bezug auf k von $k=0$ bis $k=n-1$ hervor.

31. Im Anschluß an vorstehende Aufgabe soll

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^m}{1+x^{2n}}\,dx$$

bestimmt werden, wo wieder m und n ganze positive Zahlen seien und $m<2n$.

Zur Abkürzung werde $\frac{2k+1}{2n}\pi=\alpha_k$ gesetzt. In dem Ausdruck für

$$(1)\qquad J_k = \int_{-\infty}^{\infty}s_k\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\int_{-\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{\varepsilon}}s_k\,dx$$

wird

$$(2)\qquad \left[\ln(x^2-2x\cos\alpha_k+1)\right]_{-\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{\varepsilon}} = \ln\frac{(1-2\varepsilon\cos\alpha_k+\varepsilon^2)\delta^2}{(1+2\delta\cos\alpha_k+\delta^2)\varepsilon^2},$$

woraus für $\lim \delta = 0$ und $\lim \varepsilon = 0$ der unbestimmte Wert $2 \lim\limits_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon}$ hervorgeht, es liegt ein *singuläres Integral* vor. Für $\delta = \varepsilon$ erhält man den *Hauptwert* $2 \ln 1 = 0$ (vgl. S. 61). Da ferner

$$\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

gleich π wird, wenn wir $\operatorname{arc\,tg} x$ auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränken, erhält man

$$(3) \qquad J_k = -\frac{1}{2n} \cos(m+1)\alpha_k \cdot 2 \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\pi}{n} \sin(m+1)\alpha_k$$

und mit Benutzung der Abkürzung $\frac{(m+1)}{2n}\pi = \beta$ folgt

$$(4) \quad J = \sum_0^{n-1} {}^k J_k = -\frac{1}{n}\{\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cdots + \cos(2n-1)\beta\} \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon}$$
$$+ \frac{\pi}{n}\{\sin\beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \cdots + \sin(2n-1)\beta\}.$$

Die beiden Klammerausdrücke lassen sich nun in einfachere Formen bringen; es gelten nämlich, wie später gezeigt werden soll, die Formeln

$$(5) \qquad \cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cdots + \cos(2n-1)\beta = \frac{\sin 2n\beta}{2 \sin\beta}$$

und

$$(6) \qquad \sin\beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \cdots + \sin(2n-1)\beta = \frac{\sin^2 n\beta}{\sin\beta}.$$

Im vorliegenden Beispiel ist $2n\beta = (m+1)\pi$, daher $\sin 2n\beta = 0$, während $\sin\beta = \sin \frac{m+1}{2n}\pi$ nur für $m + 1 = 2n$ verschwindet, sonst aber — da $m < 2n$ vorausgesetzt wurde — stets ein positiver echter Bruch ist. Im Falle $m + 1 < 2n$ verschwindet daher in (4) der Klammerfaktor bei $\lim\limits_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon}$, im Falle $m + 1 = 2n$ wird er

$$\lim_{\beta=\pi} \frac{\sin 2n\beta}{2 \sin\beta} = \left[\frac{2n \cos 2n\beta}{2 \cos\beta}\right]_{\beta=\pi} = -n.$$

Der Faktor von $\frac{1}{n}\pi$ in (4) wird gleich $\sin^2 \frac{(m+1)}{2}\pi : \sin \frac{(m+1)}{2n}\pi$, wird also für jeden geraden Wert von m gleich $1 : \sin \frac{m+1}{2n}\pi$; ist jedoch m eine ungerade Zahl, so verschwindet der Faktor von $\frac{1}{n}\pi$.

Im Falle eines ungeraden m stellt übrigens der Integrand $x^m:(1+x^{2n})$ eine ungerade Funktion dar und nach Aufg. 6, S. 75 ist für eine solche Funktion $f(x)$ stets

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Wir haben somit das Ergebnis:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{m+1}{2n}\pi}, \quad \text{falls } m \text{ eine } \textit{gerade} \text{ Zahl ist,}$$
$$= 0, \qquad \text{falls } m \text{ eine } \textit{ungerade} \text{ Zahl ist.}$$

Zum Schluß mögen noch die oben benutzten goniometrischen Formeln bewiesen werden. Der Ausdruck (5) für die Summe der Kosinus folgt durch Addition der elementaren Formeln:

$$\begin{aligned}
-\sin 2\beta &= -2\sin\beta\cos\beta\\
\sin 2\beta - \sin 4\beta &= -2\sin\beta\cos 3\beta\\
\sin 4\beta - \sin 6\beta &= -2\sin\beta\cos 5\beta\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sin 2(n-1)\beta - \sin 2n\beta &= -2\sin\beta\cos(2n-1)\beta;
\end{aligned}$$

man erhält einerseits nur $-\sin 2n\beta$, andererseits

$$-2\sin\beta\,\{\cos\beta + \cos 3\beta + \cdots + \cos(2n-1)\beta\}.$$

Der Ausdruck (6) für die Summe

$$\sin\beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \cdots + \sin(2n-1)\beta$$

folgt in gleicher Weise durch Addition der elementaren Formeln:

$$\begin{aligned}
1 - \cos 2\beta &= 2\sin\beta\sin\beta\\
\cos 2\beta - \cos 4\beta &= 2\sin 3\beta\sin\beta\\
\cos 4\beta - \cos 6\beta &= 2\sin 5\beta\sin\beta\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cos 2(n-1)\beta - \cos 2n\beta &= 2\sin(2n-1)\beta\sin\beta;
\end{aligned}$$

dabei ist in der Summe der linken Seite dieser Gleichungen noch $1-\cos 2n\beta$ durch $2\sin^2 n\beta$ zu ersetzen.

32. $\int \frac{x^m}{x^{2n}-1}\,dx$, wo m, n ganze positive Zahlen seien und $m < 2n$.

Die Summe der durch die zwei reellen Wurzeln $x=1$ und $x=-1$

der Gleichung $x^{2n} - 1 = 0$ veranlaßten Partialbrüche der Zerlegung von $x^m : (x^{2n} - 1)$ ist

$$s_0 = \frac{1}{2n(x-1)} - \frac{(-1)^m}{2n(x+1)},$$

daher

$$\int s_0\,dx = \frac{1}{2n}\ln(x-1) - \frac{(-1)^m}{2n}\ln(x+1).$$

Die Summe der durch die Wurzel

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \quad \text{(vgl. Auf. 17, S. 131)}$$

und die konjugiert komplexe Wurzel $1 : \varepsilon_k$ veranlaßten Partialbrüche wird

$$s_k = \frac{A_k + iB_k}{x - \varepsilon_k} + \frac{A_k - iB_k}{x - \frac{1}{\varepsilon_k}},$$

wo $A_k + iB_k$ nach Regel **1**, S. 109 gleich

$$\frac{\varepsilon_k^{\,m}}{2n\,\varepsilon_k^{\,2n-1}} = \frac{\varepsilon_k^{\,m+1}}{2n}, \qquad A_k - iB_k = \frac{1}{2n\,\varepsilon_k^{\,m+1}}$$

ist. In ähnlicher Weise wie bei Aufg. 30, S. 136f. findet man

$$J_k = \int s_k\,dx = \frac{1}{2n}\cos\frac{k(m+1)}{n}\pi \cdot \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

$$-\frac{1}{n}\sin\frac{k(m+1)}{n}\pi \cdot \operatorname{arctg}\frac{x - \cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

und

$$J = \frac{1}{2n}\ln(x-1) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n}\ln(x+1) + \sum_1^{n-1}{}^k J_k.$$

33. Im Anschluß an vorstehende Aufgabe soll

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} - 1}\,dx \qquad\qquad 2m < 2n$$

bestimmt werden; dabei ist der Exponent $2m$ des Zählers als gerade Zahl gekennzeichnet, denn wäre der Exponent eine ungerade Zahl, so würde Null als Wert des Integrals hervorgehen (vgl. Aufg. 31, S. 139). In dem Ergebnis von Aufg. 32 ist somit jetzt m durch $2m$ zu ersetzen.

Der in Aufg. 32 mit s_0 bezeichnete Ausdruck wird jetzt gleich $\frac{1}{n(x^2-1)}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{n(x^2-1)} = \frac{2}{n}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{2}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \frac{2}{n}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1};$$

durch die Substitution $x = 1 : z$ geht aber das zweite der beiden letzten Integrale in $\frac{2}{n}\int\limits_1^0 \frac{dz}{z^2 - 1}$ über, ist somit dem ersten entgegengesetzt gleich, man hat daher $\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_0\, dx = 0$.

Mit Rücksicht auf den Ausdruck für J_k in Aufg. 32 und bei gleichem Verfahren wie in Aufg. 31 folgt

$$J_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_k\, dx = \frac{1}{2n} \cos \frac{k(2m+1)}{n}\pi \cdot 2 \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\pi}{n} \sin \frac{k(2m+1)}{n}\pi .$$

Mit Benutzung der Abkürzung $\frac{(2m+1)}{n}\pi = \beta$ wird

$$J = \sum_1^{n-1}{}^k J_k = \frac{1}{n} \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \{\cos\beta + \cos 2\beta + \cdots + \cos(n-1)\beta\}$$

$$- \frac{\pi}{n} \{\sin\beta + \sin 2\beta + \cdots + \sin(n-1)\beta\} \cdot$$

Hier ist nun

$$\cos\beta + \cos 2\beta + \cdots + \cos(n-1)\beta = \frac{\cos(n-1)\beta - \cos n\beta}{2(1-\cos\beta)} - \frac{1}{2}$$

(vgl. Teil I, S. 12), wofür jetzt wegen $\cos n\beta = \cos(2m+1)\pi = -1$ auch

$$\frac{\cos(n-1)\beta + \cos\beta}{2(1-\cos\beta)} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{2m+1}{n}\pi\right) + \cos\frac{2m+1}{n}\pi}{2(1-\cos\beta)}$$

gesetzt werden kann, ein Ausdruck, der gleich Null ist.

Ferner ist

$$\sin\beta + \sin 2\beta + \cdots + \sin(n-1)\beta = \frac{\sin\beta + \sin(n-1)\beta - \sin n\beta}{2(1-\cos\beta)}$$

(vgl. Teil I, S. 12), wofür wegen $\sin n\beta = \sin(2m+1)\pi = 0$ auch

$$\frac{\sin\beta + \sin(n-1)\beta}{2(1-\cos\beta)} = \frac{\sin\beta(1-\cos n\beta)}{2(1-\cos\beta)} = \frac{\sin\beta}{1-\cos\beta} = \cot\frac{1}{2}\beta$$

gesetzt werden kann.

So ergibt sich schließlich

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}-1}\, dx = -\frac{\pi}{n}\cot\frac{1}{2}\beta = -\frac{\pi}{n}\cot\frac{2m+1}{2n}\pi, \qquad 2m < 2n;$$

ferner folgt (vgl. Aufg. 6, S. 75)

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}-1}\, dx = \frac{-\pi}{2n}\cot\frac{2m+1}{2n}\pi .$$

34. Mit Hilfe der Substitution $x^{2n} = z$ und unter Benutzung der Abkürzung $\frac{2m+1}{2n} = p$ sollen aus den Ergebnissen von Aufg. 31 und 33 die beiden Formeln abgeleitet werden:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{1-z}\,dz = \pi\cot(p\pi), \qquad 0 < p < 1.$$

C) Einige Anwendungen der Integration rationaler Funktionen. Fall eines Körpers im lufterfüllten Raum.

1. Man soll die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m untersuchen, der aus der Ruhelage gegen den Mittelpunkt der Erde fällt; dabei werde angenommen, daß der Widerstand der Luft dem Quadrat der Geschwindigkeit v des Punktes proportional, also gleich c^2v^2 sei. Die Änderung der Beschleunigung der Schwere soll nicht berücksichtigt werden. Die Bewegung beginne zur Zeit $t = 0$; die zur Zeit t_1 zurückgelegte Strecke habe die Länge s_1, die dann erreichte Geschwindigkeit sei v_1.

Legt man der Richtung der senkrecht nach unten wirkenden Beschleunigung der Schwere positiven Sinn bei, so hat man zunächst (vgl. Aufg. 32, S. 13):

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - c^2v^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g - k^2v^2, \tag{1}$$

wenn die Konstante $c^2 : m = k^2$ gesetzt wird. Hieraus folgt

$$t_1 = \int_0^{v_1} \frac{dv}{g - k^2v^2} = -\frac{1}{2k\sqrt{g}}\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{g}}{k} - v\right) - \ln\left(v + \frac{\sqrt{g}}{k}\right)\right\}_{v=0}^{v=v_1} \quad \text{oder}$$

$$t_1 = \frac{1}{2k\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{g}+kv_1}{\sqrt{g}-kv_1}. \tag{2}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach v_1 ergibt

$$v_1 = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{e^{2k\sqrt{g}t_1} - 1}{e^{2k\sqrt{g}t_1} + 1} = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{e^{k\sqrt{g}t_1} - e^{-k\sqrt{g}t_1}}{e^{k\sqrt{g}t_1} + e^{-k\sqrt{g}t_1}} \tag{3}$$

oder bei Einführung hyperbolischer Funktionen (vgl. Teil I, S. 7)

$$v_1 = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{\mathfrak{Sin}(k\sqrt{g}t_1)}{\mathfrak{Cof}(k\sqrt{g}t_1)} = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\mathfrak{Tg}(k\sqrt{g}t_1), \tag{3a}$$

wo die Funktion $\mathfrak{Tg}$ die hyperbolische Tangente, den Quotienten $\mathfrak{Sin}$: $\mathfrak{Cof}$ bedeutet. Da diese Funktion mit wachsendem Argument dem Grenzwert 1 zustrebt (schon für $x = 2{,}3$ ist $\mathfrak{Tg}\,x = 0{,}98$), so zeigt die Gleichung (3a), daß die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit dem Grenzwert $v_\infty = \sqrt{g} : k$ zustrebt.

Mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$ erhält man aus (3a) für die nach Verlauf der Zeit t_1 zurückgelegte Weglänge:

$$s_1 = \frac{\sqrt{g}}{k} \int_0^{t_1} \frac{\mathfrak{Sin}\,(k\sqrt{g}\,t)}{\mathfrak{Cof}\,(k\sqrt{g}\,t)}\,dt = \frac{1}{k^2} \ln \mathfrak{Cof}\,(k\sqrt{g}\,t_1)\,. \tag{4}$$

Für sehr große Werte von t_1 kann $\mathfrak{Cof}\,(k\sqrt{g}\,t_1)$ durch $\frac{1}{2} e^{k\sqrt{g}\,t_1}$ ersetzt werden und man findet alsdann

$$s_1 = \frac{\sqrt{g}}{k}\,t_1 - \frac{1}{k^2} \ln 2\,.$$

Bei Auflösung von (4) nach t_1 folgt zunächst

$$e^{k^2 s_1} = \mathfrak{Cof}\,(k\sqrt{g}\,t_1) = \tfrac{1}{2}\{e^{k\sqrt{g}\,t_1} + e^{-k\sqrt{g}\,t_1}\} \qquad \text{oder} \tag{4a}$$

$$e^{2k\sqrt{g}\,t_1} - 2\,e^{k^2 s_1} e^{k\sqrt{g}\,t_1} + 1 = 0\,,$$

$$e^{k\sqrt{g}\,t_1} = e^{k^2 s_1} + \sqrt{e^{2k^2 s_1} - 1} \qquad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{1}{k\sqrt{g}} \ln\{e^{k^2 s_1} + \sqrt{e^{2k^2 s_1} - 1}\}\,. \tag{5}$$

Hier hat die Quadratwurzel das Pluszeichen zu erhalten, denn für $s = \infty$ muß auch $t = \infty$ sein, und dies ist nur der Fall, wenn man das Pluszeichen setzt.

Für sehr große Werte von s_1 kann 1 bei $e^{2k^2 s_1} - 1$ vernachlässigt werden, und man findet alsdann

$$t_1 = \frac{k}{\sqrt{g}}\,s_1 + \frac{\ln 2}{k\sqrt{g}}\,.$$

Die Gleichung (5), die die Auflösung von (4a) nach t_1 darstellt, kann noch in anderer Weise geschrieben werden. Wie nämlich die Funktion $y = \cos x$ zu der inversen Funktion $x = \operatorname{arc}\cos y$ Anlaß gibt, so ist die Umkehrung von $y = \mathfrak{Cof}\,x$ die Funktion

$$x = \mathfrak{Area\ Cofinus}\ y \quad \text{oder kürzer} \quad x = \mathfrak{Ar\ Cof}\ y\,. \tag{6}$$

Warum man diese Umkehrung als $\mathfrak{Area\ Cofinus}$ bezeichnet, wird in § 15, Aufg. 7 näher ausgeführt; hier soll nur gezeigt werden, daß diese Funktion auch durch

$$\mathfrak{Ar\ Cof}\ y = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \tag{7}$$

definiert ist, wo das Plus- oder Minuszeichen zu stehen hat, je nachdem x positiv oder negativ ist. Aus

$$\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathfrak{Cos}\, x = y \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathfrak{Sin}\, x$$

folgt nämlich unter Benutzung der Beziehung $\mathfrak{Sin}^2 x = \mathfrak{Cos}^2 x - 1$ die Gleichung

$$e^x = \mathfrak{Cos}\, x + \mathfrak{Sin}\, x = y \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

wo die Quadratwurzel das Plus- oder Minuszeichen zu erhalten hat, je nachdem x eine positive oder negative Zahl ist, denn die Funktion $\mathfrak{Sin}\, x$ hat mit x gleiches Vorzeichen. Durch Übergang zum Logarithmus ergibt sich

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1});$$

da aber

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = 1 : (y + \sqrt{y^2 - 1})$$

ist, wird

$$\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) = -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

und man hat somit

$$x = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cos}\, y.$$

Ähnlich folgt als Umkehrung von $y = \mathfrak{Sin}\, x$ die Funktion

$$(8) \qquad x = \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

wobei die Wurzel das Pluszeichen zu erhalten hat, weil $\mathfrak{Cos}\, x = \sqrt{y^2 + 1}$ stets positiv ist.

Mit Rücksicht auf (6) und (7) kann man also die Auflösung (5) der Gleichung (4a) in der Form

$$(9) \qquad t_1 = \frac{1}{k\sqrt{g}}\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cos}\, e^{k^2 s_1}$$

schreiben.

Um die Beziehung zwischen s und v zu erhalten, beachte man, daß sich in (1) die Ableitung $\frac{dv}{dt}$ auch durch $\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$ ersetzen läßt. Alsdann ergibt sich

$$v\,\frac{dv}{ds} = g - k^2 v^2 \quad \text{und} \quad s_1 = \int_0^{v_1} \frac{v\,dv}{g - k^2 v^2},$$

daher

$$(10) \qquad s_1 = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g}{g - k^2 {v_1}^2} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{\sqrt{g}}{k} \sqrt{1 - e^{-2k^2 s_1}}.$$

Die vorstehend entwickelten Formeln können auch bei *Körpern*, die im lufterfüllten Raume fallen, als angenähert richtig angesehen

werden. Eine Schwierigkeit ist hierbei stets die Bestimmung des Luftwiderstandes. Schon Newton nahm auf Grund von Versuchen mit geradlinig bewegten Platten an, daß der Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, und diese Annahme dürfte für Geschwindigkeiten von 1 bis 20 m/sek zutreffend sein.[1]) Der genannte Widerstand hängt ferner von der Größe, der Gestalt und dem Gewicht des fallenden Körpers ab und selbstverständlich auch von der Dichtigkeit der Luft. Eine genaue Formel für diese Abhängigkeit ist noch nicht gefunden; man pflegt die Abhängigkeit zum Teil durch die schon vorhin benutzte Konstante k^2 auszudrücken, indem man

$$k^2 = \frac{\varkappa \gamma F}{Q} \tag{11}$$

setzt, wo der Faktor $\varkappa$, der sogenannte Widerstandskoeffizient, von der Gestalt des fallenden Körpers und auch von dessen Geschwindigkeit v abhängt; im folgenden wird die Abhängigkeit von v vernachlässigt. Die Größe γ ist das Gewicht von 1 cbm Luft, das für trockene Luft bei einer Temperatur von 0° C und bei 760 mm Barometerstand 1,293 kg beträgt; F ist der in qm auszudrückende Flächeninhalt des größten zur Bewegungsrichtung rechtwinkligen Querschnitts und Q das in kg anzugebende Gewicht des fallenden Körpers. Die Größe γ ist natürlich nicht konstant, sondern außer von Temperatur und Barometerstand auch von der Feuchtigkeit der Luft, der geographischen Breite und der Höhe über der Erdoberfläche abhängig. Man kann für γ einen mittleren Wert, etwa 1,225 annehmen. Dieser würde einem Barometerstand $b = 760$ mm und einer Temperatur $\Theta = 15^0$ C entsprechen, oder z. B. dem Wertepaar $b = 740$, $\Theta = 7{,}5$ oder $b = 720$, $\Theta = 0$.

Der Koeffizient $\varkappa$ ist ein reiner *Zahlenfaktor*, also unabhängig von den gewählten Einheiten, denn bei Einführung des Wertes $\varkappa$ in die Gleichung (1) erhält man

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g - \varkappa \frac{\gamma F}{Q} v^2,$$

und hier muß jedes Glied der Gleichung die Dimension einer Beschleunigung haben. Diese Dimension d ist aber lt^{-2}, wenn l eine Länge, t die Zeit bedeutet; daher muß auch für $\varkappa \gamma F v^2 : Q$ die Größe d gleich lt^{-2}

1) Vgl. A. Budau, Vorträge über Theorie und Bau der Flugapparate, Wien 1909, S. 34. Bei sehr kleinem Betrage der Geschwindigkeit v kann man den Widerstand der ersten Potenz von v proportional setzen, bei Geschwindigkeiten von 240 bis 400 m/sek der dritten bis fünften Potenz. Bei größeren Beträgen von v befolgt der Widerstand wieder ein quadratisches Gesetz mit anderem Werte des Proportionalitätsfaktors. Vgl. hierzu auch die Artikel über Aërodynamik von S. Finsterwalder und über Ballistik von C. Cranz in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Teilband 3, besonders S. 160—170 und S. 195—199. Vgl. ferner Fußnote 1 zu S. 87.

sein. Nun hat aber γ als Gewicht einer Volumeinheit die Dimension $G : l^3$, wo G ein Gewicht bedeutet; die Größen F, v, Q haben der Reihe nach die Dimensionen l^2, lt^{-1}, G, für $\gamma F v^2 : Q$ folgt also

$$d = \frac{G}{l^3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{l}{t}\right)^2 : G = lt^{-2},$$

somit muß $\varkappa$ eine reine Zahl sein.

Der Koeffizient $\varkappa$ ist für zahlreiche Körper durch Versuche bestimmt worden, vor mehreren Jahren von F. von Loeßl, neuerdings von G. Eiffel,[1]) dem Erbauer des nach ihm benannten Turmes in Paris. Nach F. von Loeßl ist $\varkappa = 1$ zu setzen, wenn der fallende Körper auf seiner unteren Seite durch eine rechtwinklig zur Bewegungsrichtung gestellte Fläche begrenzt wird, die mit einem erhöhten, überall gleich hohen Rande umgeben oder konkav gestaltet ist. Für den Fall einer ebenen Fläche ohne erhöhten Rand ist $\varkappa$ ein echter Bruch. Wir teilen einige Werte von $\varkappa$ mit, die von G. Eiffel[2]) gefunden wurden; sie sind durchweg kleiner als die von F. von Loeßl gefundenen Werte. Außerdem zeigte sich, daß $\varkappa$ mit F um einen unbedeutenden Betrag wächst.

Form der Fläche F		Werte von $\varkappa$
Quadrat	10 × 10 cm	0,52
„	25 × 25 cm	0,536
„	100 × 100 cm	0,631
Rechteck	30 × 15 cm	0,560
„	45 × 15 cm	0,568
„	90 × 15 cm	0,592
„	90 × 10 cm	0,6
„	90 × 4,5 cm	0,696
Kreisscheibe von 25 cm Durchmesser		0,528
Kugel von 25 cm Durchmesser		0,088
Halbkugel von 25 cm Durchmesser		
Wölbung nach unten		0,168
Höhlung nach unten		0,664.

Ist der fallende Körper eine Kugel, so strebt ihre Geschwindigkeit dem Grenzwert $v_\infty = \sqrt{g : k}$ zu, und man findet mit Rücksicht auf (11),

1) F. von Loeßl, Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug, Wien 1896, S. 81 und 242—282; G. Eiffel, Der Luftwiderstand und der Flug, übersetzt von F. Huth, Berlin 1912.

2) Statt $\varkappa$ benutzt Eiffel die Schreibweise z oder $8K$ (a. a. O. S. 42); um $\varkappa$ zu erhalten, wurden daher die Eiffelschen Größen K mit 8 multipliziert. Für die Zahlenwerte vgl. daselbst S. 43—45, 76—80, 139—144.

daß v_∞^2 dem Produkt aus der Länge des Radius und dem Gewicht der Volumeinheit der Kugel proportional ist. Auch bei der Aufgabe, diejenige aufwärts gerichtete Geschwindigkeit der Luft zu bestimmen, die erforderlich ist, um einen in ihr schwebenden Körper im Gleichgewicht zu halten, also sein Niedersinken zu verhüten, gelangt man zu einem Ausdruck, der große Analogie zu $v_\infty = \sqrt{g} : k$ zeigt. Man nennt diesen Ausdruck die *Schwebegeschwindigkeit*; bei pneumatischem Materialtransport ist ihre Kenntnis wichtig. Hat der betreffende Körper die Gestalt einer Kugel, so ist auch hier das Quadrat der Schwebegeschwindigkeit dem Produkt aus der Länge des Radius und dem Gewicht der Volumeinheit der Kugel proportional.[1])

2. Mit Benutzung der Ergebnisse der vorstehenden Aufgabe bestimme man die Geschwindigkeit, die eine aus der Ruhelage fallende Platte von 2 kg Gewicht nach 2 Sekunden erreicht, wenn die Platte auf der nach unten gekehrten Seite durch eine wagrechte quadratische Fläche von 1 qm Inhalt begrenzt wird.

Mit $\varkappa = 0{,}631$, $\gamma = 1{,}225$, $F = 1$, $Q = 2$ wird nach (11) $k^2 = 0{,}386$; ferner findet man $\sqrt{g} : k = 5{,}038$, $k\sqrt{g} = 1{,}947$. Nach Gleichung (3a) wird somit $v_1 = 5{,}038 \cdot \mathfrak{Tg}\, 3{,}894 = 5{,}038 \cdot 0{,}999 = 5{,}034$ m/sek., und dieser Wert ist kaum verschieden von dem größten Wert $v_\infty = \sqrt{g} : k = 5{,}038$ m/sek, den die Geschwindigkeit dieser Platte nach (3a) überhaupt erreichen kann und theoretisch erst nach unendlich langer Zeit, praktisch nach 2 Sekunden erreicht.

3. Auch auf das Problem des *Fallschirms* lassen sich die Ergebnisse von Aufg. 1 anwenden. Dabei werde angenommen, daß der Fallschirm die Gestalt einer Halbkugel habe, die ihre Höhlung nach unten kehrt. Es wird gefragt, wie groß der Radius r dieser Halbkugel sein muß, wenn der Fallschirm aus der Ruhelage fällt und seine größte Geschwindigkeit v_∞ gleich 5 m/sek sein soll. Das Gesamtgewicht von Passagier und Fallschirm betrage 100 kg.

Hier ist $\varkappa = 0{,}664$, $\gamma = 1{,}225$, $F = r^2\pi$, $Q = 100$; ferner ist

$$k^2 = \varkappa \frac{\gamma F}{Q} \quad \text{und} \quad v_\infty = \frac{\sqrt{g}}{k} = \sqrt{\frac{g\,Q}{\varkappa \gamma F}}.$$

Bei Einführung der Zahlenwerte erhält man die Gleichung

$$5 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 100}{0{,}664 \cdot 1{,}225\, r^2 \pi}} \quad \text{also } r = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 100}{0{,}664 \cdot 1{,}225\, \pi}} = 3{,}92 \text{ Meter.}$$

4. Man untersuche nun die Bewegung eines materiellen Punktes, der zur Zeit $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Ober-

1) Vgl. V. Blaess, Die Strömung in Röhren und die Berechnung weitverzweigter Leitungen und Kanäle, München und Berlin 1911, S. 113—115.

fläche der Erde aus vertikal in die Höhe geschleudert wird; der Widerstand der Luft sei hierbei wieder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit v des Punktes, also etwa c^2v^2. Die Änderung der Beschleunigung der Schwere soll nicht berücksichtigt werden.

Legt man der sich vertikal aufwärts erstreckenden Richtung das Pluszeichen bei, so ist hier

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg - c^2v^2 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -(g + k^2v^2), \tag{1}$$

wenn $c^2 : m = k^2$ gesetzt wird. Durch Integration folgt

$$t_1 = -\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{g + k^2v^2} = \frac{1}{k\sqrt{g}}\left\{\text{arc tg}\,\frac{kv_0}{\sqrt{g}} - \text{arc tg}\,\frac{kv_1}{\sqrt{g}}\right\} \tag{2}$$

wofür auch nach Aufg. 14, S. 78

$$t_1 = \frac{1}{k\sqrt{g}}\ \text{arc tg}\,\frac{k\sqrt{g}(v_0 - v_1)}{g + k^2v_0v_1} \tag{2a}$$

gesetzt werden kann. Die Auflösung dieser Gleichung nach v_1 ergibt

$$v_1 = \frac{k\sqrt{g}v_0 - g\,\text{tg}\,(k\sqrt{g}t_1)}{k\sqrt{g} + k^2v_0\,\text{tg}\,(k\sqrt{g}t_1)} = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{kv_0 - \sqrt{g}\,\text{tg}\,(k\sqrt{g}t_1)}{\sqrt{g} + kv_0\,\text{tg}\,(k\sqrt{g}t_1)} \qquad \text{oder} \tag{3}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{kv_0\cos(k\sqrt{g}t_1) - \sqrt{g}\sin(k\sqrt{g}t_1)}{\sqrt{g}\cos(k\sqrt{g}t_1) + kv_0\sin(k\sqrt{g}t_1)}. \tag{3a}$$

So groß ist die Geschwindigkeit, die der materielle Punkt nach Verlauf der Zeit t_1 noch hat. Unter Benutzung von $v = \frac{ds}{dt}$ erhält man die alsdann zurückgelegte Weglänge $s_1 = \int_0^{t_1} v\,dt$, wo für v der Ausdruck (3a) einzusetzen ist. Mit Hilfe der Formel $\int\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln f(t) + c$ ergibt sich:

$$s_1 = \frac{1}{k^2}\ln\frac{\sqrt{g}\cos(k\sqrt{g}t_1) + kv_0\sin(k\sqrt{g}t_1)}{\sqrt{g}}. \tag{4}$$

Der materielle Punkt steigt bis seine Geschwindigkeit zu Null geworden ist; die zugehörige Zeitdauer T wird nach (2a)

$$T = \frac{1}{k\sqrt{g}}\ \text{arc tg}\,\frac{kv_0}{\sqrt{g}}. \tag{5}$$

Die höchste Höhe, die der Punkt überhaupt erreicht, ergibt sich aus (4) mit Hilfe von (5); sie wird

$$S = \frac{1}{k^2} \ln \sqrt{\frac{g + k^2 v_0^2}{g}} = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g + k^2 v_0^2}{g}. \tag{6}$$

Zur Ableitung einer Beziehung zwischen s_1 und v_1 bringt man die Gleichung (1) in Verbindung mit $\frac{ds}{dt} = v$; durch Elimination von dt aus beiden Gleichungen erhält man

$$ds = -\frac{v\,dv}{g + k^2 v^2},$$

somit

$$s_1 = -\int_{v_0}^{v_1} \frac{v\,dv}{g + k^2 v^2} = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g + k^2 v_0^2}{g + k^2 v_1^2}. \tag{7}$$

Auch aus dieser Gleichung folgt (6) für $v_1 = 0$.

Es liegen nun einige Fragen nahe, die noch beantwortet werden sollen, wenn auch keine Integration hierbei erforderlich ist, nämlich:

Mit welcher Geschwindigkeit v_0' kehrt der von der Erdoberfläche aus vertikal in die Höhe geschleuderte materielle Punkt wieder zur Erdoberfläche zurück und welche Zeit ist zu diesem Zurückfallen erforderlich? Ist etwa $v_0' = v_0$ oder, wenn dies nicht zutrifft, in welchem Verhältnis steht die Größe v_0' zu v_0? Ferner wirft sich die Frage auf, *ob die Dauer T des Aufsteigens größer ist oder die Dauer T_0 des Fallens bis zum Ausgangspunkt.*

Zur Beantwortung der Frage nach der Geschwindigkeit v_0' hat man nur die durch (6) gegebene Steighöhe S in die zweite der beiden Gleichungen (10), S. 144 einzutragen. Mit Rücksicht auf

$$e^{-2k^2 S} = g : (g + k^2 v_0^2)$$

findet man

$$v_0' = \frac{\sqrt{g}\, v_0}{\sqrt{g + k^2 v_0^2}}, \quad v_0' : v_0 = \sqrt{g} : \sqrt{g + k^2 v_0^2} = e^{-k^2 S}, \tag{8}$$

die Geschwindigkeit v_0', mit der der materielle Punkt die Erdoberfläche wieder erreicht, ist daher kleiner als die Geschwindigkeit v_0, mit der er in die Höhe geschleudert wurde.

Zur Berechnung der Zeit T_0, die der materielle Punkt braucht, um beim Fallen aus seiner höchsten Höhe wieder an der Erdoberfläche einzutreffen, hat man in der Gleichung (9), S. 144 für $s_1 = S$ den durch (6), S. 148 gegebenen Wert einzutragen und dann nach $t_1 (= T_0)$ aufzulösen. Man erhält zunächst

$$\mathrm{Cos}^2 (k \sqrt{g}\, T_0) = e^{2k^2 S} = \frac{g + k^2 v_0^2}{g},$$

daher $\mathfrak{Sin}\,(k\sqrt{g}\,T_0) = kv_0 : (+\sqrt{g})$ und

$$(9)\qquad k\sqrt{g}\,T_0 = \mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{kv_0}{+\sqrt{g}} = \ln\frac{kv_0 + \sqrt{k^2v_0{}^2 + g}}{\sqrt{g}},$$

während die Steigdauer T nach (5), S. 148 durch

$$(10)\qquad k\sqrt{g}\,T = \operatorname{arc\,tg}\frac{kv_0}{+\sqrt{g}}$$

bestimmt ist.

Mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{Tg}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x} = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{+\sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 x}}$$

läßt sich die Gleichung (9) in der Form

$$(11)\qquad k\sqrt{g}\,T_0 = \mathfrak{Ar\,Tg}\,\frac{kv_0}{+\sqrt{g + k^2v_0{}^2}}$$

schreiben, wo die Funktion $\mathfrak{Ar\,Tg}$ die Umkehrung von $y = \mathfrak{Tg}\,x$ darstellt. Dabei ist allgemein $x = \mathfrak{Ar\,Tg}\,y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$, denn aus

$$y = \mathfrak{Tg}\,x = \mathfrak{Sin}\,x : \mathfrak{Cof}\,x$$

folgt

$$1 + y = \frac{\mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x},\quad 1 - y = \frac{\mathfrak{Cof}\,x - \mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x},$$

also

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{\mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x - \mathfrak{Sin}\,x} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

und

$$(12)\qquad 2x = \ln\frac{1+y}{1-y},\quad x = \mathfrak{Ar\,Tg}\,y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Die Gleichung (10) nimmt bei Einführung der Funktion arc sin an Stelle von arc tg die Gestalt an

$$(13)\qquad k\sqrt{g}\,T = \arcsin\frac{kv_0}{+\sqrt{g + k^2v_0{}^2}},$$

und wenn man zur Abkürzung $kv_0 : +\sqrt{g + k^2v_0{}^2} = z$ setzt, ist also nach (11) und (13)

$$(14)\qquad k\sqrt{g}\,T_0 = \mathfrak{Ar\,Tg}\,z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},\quad k\sqrt{g}\,T = \arcsin z.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß $T < T_0$ ist, denn die Reihenentwicklung der Funktionen $\mathfrak{Ar\,Tg}\,z$ oder $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$ und $\arcsin z$ ergeben nach Teil I, S. 81 und 94:

$$\mathfrak{Ar\,Tg}\,z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots$$

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\,\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{z^5}{5} + \cdots,$$

für alle positive und endliche z ist also tatsächlich $\arcsin z < \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, z$, d. h. nach (14) $T < T_0$, *die Zeitdauer T des Aufsteigens ist kleiner als die Falldauer T_0.*

Hätte man den Widerstand der Luft nicht berücksichtigt, so würde man $T_0 = T$, $v_0' = v_0$ gefunden haben; der Durchgang durch eine und dieselbe wagrechte Ebene würde beim Steigen und Fallen mit gleicher Geschwindigkeit erfolgen.

Die Staukurve.

1. Die Integrale in Aufg. 19 und Aufg. 21, S. 134 kommen bei der Ableitung der Gleichung der sogenannten *Staukurve* vor.

Wenn sich Wasser in einem Fluß oder Kanal gleichförmig bewegt, also die mittlere Geschwindigkeit[1]) in einem jeden zur Bewegungsrichtung des Wassers rechtwinkligen Querschnitt dieselbe ist, müssen diese Querschnitte (Querprofile) einander kongruent sein, die Wassertiefe muß in jedem von ihnen dieselbe sein, und die Sohle des Flusses muß überall dieselbe Neigung α haben (vgl. Fig. 39, die ein Längsprofil des Flusses darstellt). Das Gefälle veranlaßt also hier keine Zunahme der Geschwindigkeit, sondern bewirkt nur die Überwindung des *Reibungswiderstandes.* Dieser ist proportional der Länge l der betrachteten Flußstrecke, dem benetzten Teil u des Umfanges des Querprofils und dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit v, umgekehrt proportional dem Flächeninhalt F des Querprofils und der Beschleunigung der Schwere g. Ist h das zur Strecke l gehörige absolute Gefälle, so findet also eine Gleichung statt von der Form

Fig. 39.

$$h = \zeta\, l\, \frac{u}{F}\, \frac{v^2}{2g}, \tag{1}$$

wo ζ einen Erfahrungskoeffizienten bezeichnet[2]), den man im Mittel gleich 0,008 setzen kann, wenn die in (1) vorkommenden Längen in Metern angegeben sind (vgl. hierzu übrigens S. 157).

---

1) Bekanntlich ist ja die Geschwindigkeit der Wasserteilchen an den verschiedenen Stellen eines und desselben Querschnitts verschieden, insbesondere ändert sie sich längs einer und derselben Vertikalen (vgl. Teil I, S. 117); deshalb wird hier von einer *mittleren* Geschwindigkeit gesprochen.

2) Der Koeffizient ζ ist von F, u, dem relativen Gefälle $h:l$ und einer „Rauhigkeitszahl" n abhängig. Meistens wird die Gleichung (1) in der nach v aufgelösten Form $v = \sqrt{\frac{2g}{\zeta}}\sqrt{RJ} = k\sqrt{RJ}$ geschrieben, wo $J = h:l$ das relative Gefälle, $R = F:u$ den Profilradius oder die mittlere hydraulische Tiefe bezeichnet, während $k = \sqrt{\frac{2g}{\zeta}}$ eine Größe ist, deren Abhängigkeit von J, R und der Rauhigkeitszahl n durch die heute am meisten gebrauchte Formel von

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die im Querprofil des Flusses befindliche Wasserfläche F von einem Querprofil zum anderen. Wenn also im übrigen die *Gestalt* des Querprofils überall dieselbe ist, muß sich die Wassertiefe ändern, damit in der Bewegung des Wassers ein stationärer Zustand eintreten, also durch jeden Querschnitt in der Zeiteinheit gleichviel Wasser strömen kann: das Produkt aus dem Inhalt F und der zugehörigen Geschwindigkeit v muß konstant sein.

Fig. 40.

Wäre kein Reibungswiderstand vorhanden, so würde zwischen der Geschwindigkeit v_1, mit der das Wasser in den Querschnitt F_1 der Flußstrecke eintritt und der Geschwindigkeit v_2, mit der es aus dem Querschnitt F_2 austritt (Fig. 40), nach einem Grundgesetze der Hydrodynamik die Beziehung stattfinden

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh \quad \text{oder} \quad h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}, \tag{2}$$

wo h das absolute Gefälle des Wasserspiegels bedeutet und die Ausdrücke $v_2^2 : 2g$, $v_1^2 : 2g$ die zu den Querschnitten F_2 und F_1 gehörigen „Geschwindigkeitshöhen" sind.

In Wirklichkeit ist aber ein Reibungswiderstand vorhanden, und es wird daher nicht das ganze Gefälle h wirksam gemacht, sondern nach (1) wird ein Teil $h_1 = \zeta l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}$ durch Reibung aufgezehrt. Dabei ist v die mittlere Geschwindigkeit zwischen v_1 und v_2, also $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, F die mittlere Wasserfläche $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ der Querschnitte, u der Mittelwert des benetzten Umfangs; die Einführung dieser Mittelwerte ist natürlich nur gestattet, wenn die Flußstrecke l entsprechend kurz ist. Unter dieser Voraussetzung geht die zweite Gleichung (2) über in

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \zeta l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}. \tag{3}$$

Bei längeren Strecken oder wenn die Sohle keine Ebene ist, muß man die Flußstrecke in einzelne Teile zerlegen und auf jede Teilstrecke die Formel (3) anwenden.

Wir wollen nun annehmen, daß das Wasser durch ein in den Fluß eingebautes Hindernis, z. B. ein Wehr oder einen Brückenpfeiler gestaut wird, und es fragt sich alsdann, welche Gestalt der Wasserspiegel im Längsprofil oberhalb des Wehres annimmt, man soll m. a. W. die *Stau-*

E. Ganguillet und W. R. Kutter dargestellt wird. Es gibt übrigens noch zahlreiche andere Ausdrücke für die Größe k der „Chezy-Eytelweinschen Formel" $v = k\sqrt{RJ}$; wir verweisen hierfür auf die Lehrbücher, z. B. auf den Artikel von J. F. Bubendey über praktische Hydraulik im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 3. Teil, 1. Bd. der 4. Auflage, Leipzig 1911, S. 494—516.

kurve bestimmen.[1]) Dabei setzen wir, um überhaupt eine analytische angenäherte Lösung der Aufgabe geben zu können, voraus, daß der Querschnitt des Flusses regelmäßig gestaltet sei und der Flußlauf keine Krümmung mache; natürlich gelten auch alle bei Ableitung der Formel (3) gemachten Voraussetzungen. Außerdem soll im folgenden die *Stauweite* bestimmt werden, d. h. die vom Wehr ab gemessene Länge der Strecke, längs deren der Wasserspiegel infolge der Stauung gehoben wird.

Wir legen der Betrachtung ein *Längsprofil* des Flusses zugrunde und wählen in ihm als Koordinatenanfang O die Stelle der Flußsohle, an der der Aufbau des Wehres beginnt. Die positive Richtung erstrecke sich bei der wagrechten x-Achse nach links, wenn der Fluß von links nach rechts fließt, bei der senkrechten y-Achse nach oben.

Das Querprofil des Flusses sei zunächst ein Rechteck von so großer Breite b, daß der benetzte Umfang u ohne wesentlichen Fehler durch die Breite b ersetzt werden kann.

Bei Anwendung der Formel (3) auf zwei im Abstand x und $x + dx$ von der y-Achse befindliche Querschnitte ist h durch dy zu ersetzen, l durch $\frac{1}{\cos\alpha}dx$; bedeutet ferner v die mittlere Geschwindigkeit im ersten der beiden genannten Querschnitte, so ist die im zweiten $v + dv$, in Gleichung (3) wird man also $v_1 = v + dv$, $v_2 = v$ setzen Alsdann wird $v_2^2 - v_1^2 = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = -dv(2v + dv)$, wofür bei Vernachlässigung des Gliedes mit dv^2 einfach $-2v\,dv$ zu setzen ist, so daß aus (3) die Gleichung

$$(4) \qquad dy = -\frac{v\,dv}{g} + \zeta\frac{u}{F}\frac{v^2}{2g}\frac{dx}{\cos\alpha}$$

hervorgeht.

Es sei nun a die Tiefe des ungestauten Wassers, *t die Tiefe des gestauten Wassers*[2]) an dem zur Abszisse x gehörigen Querschnitt, v_0 und v seien die zugehörigen Geschwindigkeiten. Ist alsdann Q die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließende Wassermenge, so besteht die Beziehung

$$(5) \qquad Q = v_0\,ab = v\,tb,$$

woraus durch Differentiation

$$(6) \qquad v\,dt + t\,dv = 0 \quad \text{und} \quad v\,dv = -\frac{v^2}{t}dt$$

folgt. Vermöge dieser Gleichung läßt sich anstelle von dv das Differential dt in (4) einführen; außerdem wollen wir auch dy durch dx und

1) Vgl. auch den vorhin erwähnten Artikel von J. F. Bubendey, S. 525—560; ferner W. Keck, Vorträge über Mechanik, 2. Teil, 3. Aufl., bearbeitet von L. Hotopp, Hannover 1909, S. 328—339; A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 1. Bd., 3. Aufl., Leipzig 1905, S. 394—401.

2) Es sei noch einmal besonders hervorgehoben, daß bei der folgenden Untersuchung die Größe t *nicht*, wie sonst häufig, die Zeit bedeutet.

dt ausdrücken. Dies kann geschehen, indem man die zur Abszisse x gehörige Ordinate $KL = y$ (Fig. 41) des Punktes L der Staukurve betrachtet. Offenbar ist

$$(7) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha + t, \quad \text{also} \quad dy = dx \operatorname{tg} \alpha + dt,$$

so daß (4) mit Rücksicht auf (6) in

$$dx \operatorname{tg} \alpha + dt = \frac{v^2}{gt} dt + \zeta \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g} \frac{dx}{\cos \alpha}$$

oder in

$$(8) \qquad \left(\operatorname{tg} \alpha - \zeta \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g} \frac{1}{\cos \alpha}\right) dx = -\left(1 - \frac{v^2}{gt}\right) dt$$

übergeht. Auch die Geschwindigkeit v läßt sich aus dieser Gleichung entfernen, denn nach (5) ist $v^2 = a^2 v_0^2 : t^2$. Wenn man ferner beachtet, daß für den nicht gestauten Querschnitt von der Tiefe a und vom Flächeninhalt F_0 das relative Gefälle $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ ist, so folgt im Hinblick auf (7), daß für diesen Querschnitt $\frac{dt}{dx}$ verschwindet; ist u_0 die zugehörige Länge des benetzten Umfangs, so wird nach (8)

$$\operatorname{tg} \alpha - \zeta \frac{u_0}{F_0} \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha} = 0.$$

Fig. 41.

Diese Gleichung liefert für $v_0^2 : 2g$ den Wert $F_0 \sin \alpha : \zeta u_0$, der angenähert durch $ab \sin \alpha : \zeta b$ oder $a \sin \alpha : \zeta$ ersetzt werden kann. Daher ergibt sich

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{a^2 v_0^2}{2g t^2} = \frac{a^3 \sin \alpha}{\zeta t^2},$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung (8) einführt und in ihr $u : F$ durch $b : bt = 1 : t$ ersetzt, folgt

$$(8a) \qquad \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{a^3}{t^3}\right) dx = -\left(1 - \frac{2a^3 \sin \alpha}{\zeta t^3}\right) dt$$

oder

$$(9) \qquad -\operatorname{tg} \alpha \, dx = \frac{t^3 - \frac{2a^3 \sin \alpha}{\zeta}}{t^3 - a^3} dt = \frac{t^3 - m^3}{t^3 - a^3} dt,$$

wobei zur Abkürzung $\frac{2a^3 \sin \alpha}{\zeta} = m^3$ gesetzt wurde. Daher wird

$$(10) \qquad -x \operatorname{tg} \alpha = \int \frac{t^3 - m^3}{t^3 - a^3} dt + C.$$

Dieses Integral ist nach Regel **1**, S. 109 zu verwandeln in

$$(10a) \qquad \int \left(1 + \frac{a^3 - m^3}{t^3 - a^3}\right) dt = t + (a^3 - m^3) \int \frac{dt}{t^3 - a^3},$$

wo nun das Integral der rechten Seite von (10a) durch die Substitution $t : a = \tau$ in $\frac{1}{a^2}\int \frac{d\tau}{\tau^3 - 1}$ übergeht, und dies ist durch Aufg. 19, S. 134 erledigt. Mit Rücksicht hierauf folgt

$$(11)\quad -x \operatorname{tg} \alpha = t + \frac{a^3 - m^3}{3a^2}\left\{\ln \frac{t-a}{a} - \frac{1}{2}\ln \frac{t^2 + at + a^2}{a^2} - \sqrt{3} \operatorname{arc tg} \frac{2t + a}{a\sqrt{3}}\right\} + C.$$

Die Integrationskonstante läßt sich bestimmen, indem man z. B. annimmt, daß die am Wehr ($x = 0$) vorhandene Wassertiefe $t = H$ bekannt ist. Man erhält schließlich zwischen der Abszisse x und der Wassertiefe t die Beziehung

$$(12)\qquad x \operatorname{tg} \alpha = H - t$$

$$+ \frac{a^3 - m^3}{3a^2}\left\{\ln \frac{(H-a)\sqrt{t^2 + at + a^2}}{(t-a)\sqrt{H^2 + aH + a^2}} - \sqrt{3}\left(\operatorname{arc tg} \frac{2H + a}{a\sqrt{3}} - \operatorname{arc tg} \frac{2t + a}{a\sqrt{3}}\right)\right\},$$

wobei der Faktor von $-\sqrt{3}$ nach Aufg. 14, S. 78 durch

$$\operatorname{arc tg} \frac{a(H-t)\sqrt{3}}{2Ht + a(H+t) + 2a^2}$$

ersetzt werden kann. Auch würde man in der linken Seite der Gleichung (12) anstelle von $\operatorname{tg} \alpha$ das zum Winkel α gehörige Bogenmaß α setzen dürfen, da der Winkel α eine kleine Größe ist.

Will man die Gleichung der Staukurve in den Koordinaten x, y haben, so ist t in (11) und (12) nach (7) durch $y - x \operatorname{tg} \alpha$ zu ersetzen.

Es mögen hier noch einige Untersuchungen angereiht werden, die zwar nicht in das Gebiet der Integralrechnung gehören, aber an (11) und (12) anknüpfen und Interesse verdienen. Zuvor sei aber daran erinnert, daß bei den vorstehenden Ableitungen gewisse Voraussetzungen gemacht wurden, die in der Wirklichkeit nicht strenge erfüllt sind. Es wurde z. B. für die Geschwindigkeit ein Mittelwert eingeführt, u durch b ersetzt, die Größe ζ als konstant betrachtet, während ζ im gestauten Wasser jedenfalls einen anderen Wert hat als im ungestauten.

Zur Bestimmung der schon S. 153 erwähnten *Stauweite* ist in (12) $t = a$ zu setzen; man erhält alsdann $x = \infty$, d. h. der gestaute Wasserspiegel geht erst in unendlich großer Entfernung in den ungestauten über, ein praktisch wertloses Ergebnis. In Wirklichkeit wird es genügen, den Anfangspunkt der Staukurve in dem Teil der Kurve anzunehmen, in dem t nur wenige Zentimeter größer ist als a.

Zur Untersuchung einer Kurve sind bekanntlich die zwei ersten Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wichtig; sie mögen daher zunächst bestimmt

werden. Nach (7) ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{dt}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2t}{dx^2}$; mit Rücksicht auf (9) erhält man also

$$(13) \qquad \frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{t^3 - a^3}{t^3 - m^3}\right) \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3 - m^3}{t^3 - m^3} \operatorname{tg}\alpha,$$

und dieser Wert ist im Intervall $a < t$ und für $a \neq m$ ein echter Bruch, denn die Neigung α der Flußsohle ist in Wirklichkeit meist gering, also $\operatorname{tg}\alpha$ jedenfalls ein kleiner echter Bruch. Aus (13) folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(a^3 - m^3)\, 3t^2 \operatorname{tg}\alpha}{(t^3 - m^3)^2} \frac{dt}{dx} = \frac{3(a^3 - m^3)t^2(t^3 - a^3)\operatorname{tg}^2\alpha}{(t^3 - m^3)^3},$$

das Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ stimmt daher mit dem Vorzeichen des Wertes $(a^3 - m^3)(t^3 - a^3) : (t^3 - m^3)$ überein oder da innerhalb der Stauung $a < t$ ist und nur die der Stauung entsprechende Strecke der Kurve (12) betrachtet werden soll, hat $\frac{d^2y}{dx^2}$ innerhalb dieser Strecke dasselbe Vorzeichen wie $(a^3 - m^3) : (t^3 - m^3)$, also wie $\frac{dy}{dx}$. Jedenfalls hat daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen positiven Wert, so lange $m < a$ ist oder, wegen $m^3 = \frac{2a^3 \sin\alpha}{\zeta}$, so lange $2\sin\alpha < \zeta$ ist. In diesem Falle kehrt die Kurve ihre konkave Seite nach oben. Mit dem schon früher erwähnten Mittelwert 0,008 für ζ würde $\sin\alpha < 0{,}004$ folgen, das relative Gefälle wäre alsdann kleiner als 1 : 250.[1]) Die Bedingung $m < a$ läßt sich übrigens auch mit Hilfe der schon benutzten, nur angenähert richtigen Beziehung $\frac{v_0^2}{2g} = \frac{a \sin\alpha}{\zeta}$ auch durch $v_0^2 < ag$ ersetzen.

Im Falle $m = a$ folgt aus (12) die einfache Gleichung $x \operatorname{tg}\alpha = H - t$; da aber $t = y - x\operatorname{tg}\alpha$ ist, erhält man nun als Staukurve die wagrechte Gerade $y = H$.

Besonderes Interesse bietet der Fall $m > a$, d. h. $2\sin\alpha > \zeta$ oder auch $\frac{v_0^2}{g} > a$, die Wassertiefe a ist dann kleiner als die doppelte Geschwindigkeitshöhe. Für den Wert $t = m$ wird hier $\frac{dy}{dx} = \infty$, die Kurve hat also eine vertikale Tangente, und tatsächlich ist der Wasserspiegel an der entsprechenden Stelle nahezu senkrecht, es findet ein sogenannter *Wassersprung* statt, eine Erscheinung, die im Jahre 1819 von dem Italiener G. Bidone[2]) beschrieben wurde. Im Intervall $a < t < m$ ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, im Intervall $t > m$ negativ; oberhalb der Sprungstelle kehrt

---

1) Dieser Fall liegt meistens in der Natur vor; so ist z. B. das relative Gefälle des Rheins bei Mannheim 1 : 10000, von Bingen bis Bacharach etwa 1 : 2060.

2) Vgl. dessen Abhandlung Expériences sur le remou et sur la propagation des ondes in den Memorie della reale accademia delle scienze di Torino, Bd. 25 (1820), S. 21.

also die Staukurve die konkave Seite nach oben, unterhalb der Sprungstelle die konvexe Seite.

Auch die *Höhe des Wassersprungs* läßt sich angenähert bestimmen. Nimmt man nämlich an, daß die Wassertiefe in nächster Nähe des Wassersprunges, aber oberhalb desselben mit der Tiefe a des ungestauten Wassers übereinstimme, eine Annahme, die meist angenähert richtig ist, und nennt man t_1 die Tiefe des Wassers direkt unterhalb des Sprunges, v_0 und v_1 die zu a und t_1 gehörigen Geschwindigkeiten, so ist nach (2)

$$t_1 - a = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}. \tag{14}$$

Da ferner durch jeden Querschnitt in der Zeiteinheit gleich viel Wasser strömen soll, ist $av_0 = v_1 t_1$, also $v_1 = av_0 : t_1$ und

$$t_1 - a = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - \frac{a^2 v_0^2}{t_1^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g t_1^2}(t_1^2 - a^2)$$

oder nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $t_1 - a$:

$$2gt_1^2 - v_0^2 t_1 = av_0^2, \quad \text{somit} \quad t_1 = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 8agv_0^2}}{4g},$$

wo bei der Quadratwurzel das Pluszeichen zu setzen ist, denn andernfalls würde t_1 negativ werden. Für die Höhe des Wassersprungs erhält man daher als angenäherten Ausdruck

$$t_1 - a = \frac{v_0^2 + v_0\sqrt{v_0^2 + 8ag} - 4ag}{4g}. \tag{15}$$

Wir möchten bei dieser Gelegenheit darauf hinweisen, daß die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung nur theoretische Bedeutung haben, also nur als eine erste, in vielen Fällen unbefriedigende Annäherung an das wirkliche Verhalten aufgefaßt werden dürfen. Lassen sich doch bei derartigen Untersuchungen keineswegs sämtliche Einflüsse, die durch die Reibung des Flusses an den Uferwänden, im Flußbett oder durch die gegenseitige Reibung der Wasserteilchen hervorgerufen werden, mathematisch formulieren. Der auf Seite 151 eingeführte Erfahrungskoeffizient ζ wird überdies in Wirklichkeit nicht einmal für eine kurze Strecke des Flußlaufes konstant sein; er wird sich außerdem auch mit der Zeit ändern, da im Flußbett fortwährend kleinere oder größere Änderungen vorkommen. Der früher erwähnte Mittelwert 0,008 für ζ kann eigentlich nur darüber Auskunft geben, von welcher Größenordnung etwa ζ ist. Vgl. auch die Fußnote 2) zu S. 151.

2. Es soll nun dieselbe Aufgabe wie bei 1 durchgeführt werden für den Fall, daß das Querprofil des Flusses eine Parabel ist oder ein Trapez, an dessen Stelle aber eine Ersatzparabel treten kann.[1])

1) Über die Bestimmung dieser Ersatzparabel vgl. J. F. Bubendey, Artikel über praktische Hydraulik im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 3. Teil, 1. Bd., 4. Aufl., Leipzig 1911, S. 530—532.

Bezogen auf ein Koordinatensystem t, z, dessen t-Achse mit der Achse der Parabel zusammenfällt, während die z-Achse Scheiteltangente ist, sei

$$z^2 = 2pt \tag{1}$$

die Gleichung der Parabel. Ferner sei b die Breite des Wasserspiegels, a die Wassertiefe in einem Querschnitt des ungestauten Wassers kurz vor Beginn der Stauung (Fig. 42). Alsdann ist (nach Aufg. 24, S. 7) $F_0 = \frac{2}{3}ab$ der Flächeninhalt dieses Querschnitts q_0, und wenn man wieder, wie in Aufg. 1, annimmt, daß der benetzte Umfang u_0 von q_0 ohne in Betracht kommenden Fehler durch die Breite des Wasserspiegels ersetzt werden kann, wird $u_0 : F_0 = b : \frac{2}{3}ab = 3 : 2a$. Analog ist

Fig. 42.

$$F = \tfrac{2}{3}t \cdot 2z \tag{2}$$

der Inhalt eines Querschnitts q des gestauten Wasses von der Tiefe t, daher

$$u : F = 3 : 2t. \tag{3}$$

Die Forderung, daß durch jeden Querschnitt in gleichen Zeiten gleiche Wassermengen fließen sollen, liefert die Beziehung

$$\tfrac{2}{3}abv_0 = \tfrac{4}{3}tzv = \tfrac{4}{3}t\sqrt{2pt}\,v$$

oder

$$v^2 = \frac{a^2b^2v_0^{\,2}}{8pt^3}, \tag{4}$$

und wenn diese Gleichung in der Form $v^2t^3 = a^2b^2v_0^{\,2} : 8p$ geschrieben wird, folgt durch Differentiation $3v^2t^2\,dt + 2vt^3\,dv = 0$ oder

$$dv = -\frac{3}{2}\,\frac{v}{t}\,dt, \qquad v\,dv = -\frac{3}{2}\,\frac{v^2}{t}\,dt. \tag{5}$$

Bevor wir die Ausdrücke (3), (4) und (5) in die schon in Aufg. 1 benutzte und daselbst abgeleitete Gleichung

$$dy = -\frac{v\,dv}{g} + \zeta\,\frac{u}{F}\,\frac{v^2\,dx}{2g\cos\alpha} \tag{6}$$

eintragen, soll der Ausdruck (4) für v^2 noch vereinfacht werden. Dies kann geschehen, wenn man beachtet, daß auch jetzt gerade so wie in Aufg. 1 die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha - \zeta\,\frac{u_0}{F_0}\,\frac{v_0^{\,2}}{2g\cos\alpha} = 0$$

gilt, aus der wegen $u_0 : F_0 = 3 : 2a$ die Beziehung

$$\frac{v_0^{\,2}}{2g} = \frac{2}{3}\,\frac{a\sin\alpha}{\zeta} \tag{7}$$

folgt. Hierdurch und vermöge der Gleichung $(\frac{1}{2}b)^2 = 2pa$ erhält man für $v^2 : 2g$ aus (4) den Wert:

$$(8) \qquad \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3} \frac{a^4 \sin\alpha}{\zeta t^3},$$

und anstelle von (5) tritt

$$(9) \qquad v\,dv = -\frac{2a^4 g \sin\alpha}{\zeta t^4}\,dt.$$

Mit Rücksicht auf (3), (8) und (9) geht nunmehr aus (6) die Gleichung

$$(10) \qquad dy = \frac{2a^4 \sin\alpha}{\zeta t^4}\,dt + \frac{a^4 \operatorname{tg}\alpha}{t^4}\,dx$$

hervor, und da auch jetzt wieder, wie in Aufg. 1, die Beziehung

$$dy = \operatorname{tg}\alpha\,dx + dt$$

stattfindet, folgt schließlich

$$(11) \qquad \left(1 - \frac{a^4}{t^4}\right) \operatorname{tg}\alpha\,dx = -\left(1 - \frac{2a^4 \sin\alpha}{\zeta t^4}\right) dt,$$

eine Gleichung, die in der Form

$$(12) \qquad -\operatorname{tg}\alpha\,dx = \frac{t^4 - m^4}{t^4 - a^4}\,dt$$

geschrieben werden kann, wenn man $2a^4 \sin\alpha : \zeta$ durch m^4 ersetzt. Aus (12) folgt sofort

$$(13) \qquad -x \operatorname{tg}\alpha = \int \frac{t^4 - m^4}{t^4 - a^4}\,dt + C,$$

also mit Rücksicht auf Regel **1**, S. 109:

$$(14) \qquad -x \operatorname{tg}\alpha = t + (a^4 - m^4) \int \frac{dt}{t^4 - a^4} + C.$$

Man beachte hierbei die Analogie dieser Gleichungen (12) bis (14) zu den Gleichungen (9) und (10) von Aufg. 1, S. 154. Das Integral in (14) geht durch die Substitution $t = a\tau$ in

$$\frac{1}{a^3} \int \frac{d\tau}{\tau^4 - 1}$$

über, das durch Aufg. 21, S. 134 erledigt ist. Bezeichnet H die Wassertiefe am Wehr $(x = 0)$, so erhält man ähnlich wie in Aufg. 1 die Gleichung

$$(15) \quad x \operatorname{tg}\alpha = H - t + \frac{a^4 - m^4}{4a^3} \left\{ \ln \frac{(H-a)(t+a)}{(H+a)(t-a)} - 2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{H}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}\right) \right\}.$$

Hierbei kann die Differenz der beiden Funktionen arc tg nach Aufg. 14, S. 78 durch $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a(H-t)}{Ht + a^2}$ ersetzt werden.

Aus der Beziehung (15) zwischen der Wassertiefe t und der Abszisse x des ihr zugehörigen Querschnitts erhält man die Gleichung der Staukurve in laufenden Koordinaten x, y, wenn man t durch $y - x \operatorname{tg} \alpha$ ersetzt.

Für $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{dt}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 t}{dx^2}$ findet man die Ausdrücke:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4 - m^4}{t^4 - m^4} \operatorname{tg} \alpha, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4(a^4 - m^4)\, t^3 (t^4 - a^4) \operatorname{tg}^2 \alpha}{(t^4 - m^4)^3}.$$

Da diese analog gebaut sind wie die entsprechenden Ausdrücke in Aufg. 1, gestaltet sich auch die Untersuchung der Staukurve ganz ähnlich, soll daher nun unterbleiben. Nur ein Umstand sei hervorgehoben. Während bei Aufg. 1 die Berechnung der Höhe des Wassersprunges auf eine quadratische Gleichung führte, ergibt sich nun eine kubische Gleichung; es läßt sich leicht zeigen, daß sie nur *eine* reelle Wurzel hat.

3. Die Gleichung der Staukurve für den Fall abzuleiten, daß der Flußlauf zwar einen rechteckigen Querschnitt hat, aber der benetzte Teil des Umfangs nicht durch die Breite des Wasserspiegels ersetzt werden darf, da die Breite, verglichen mit der Tiefe, nicht groß genug ist.[1])

Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Gleichungen anzugeben und gehen auf die Rechnung nicht näher ein. Hier wird $F_0 = ab$, $u_0 = b + 2a$, $F = bt$, $u = b + 2t$; anstelle von (8a), S. 154 tritt

$$\left\{1 - \frac{a^3(b + 2t)}{(b + 2a)t^3}\right\} \operatorname{tg} \alpha \, dx = -\left\{1 - \frac{2a^3 b \sin \alpha}{\zeta(b + 2a)t^3}\right\} dt,$$

woraus mit Hilfe der Abkürzung $m^3 = \frac{2a^3 \sin \alpha}{\zeta}$ die Gleichung

$$-\operatorname{tg} \alpha \, dx = \frac{(b + 2a)t^3 - bm^3}{(b + 2a)t^3 - a^3(b + 2t)} dt = \left\{1 + \frac{2a^3 t + b(a^3 - m^3)}{(b + 2a)t^3 - 2a^3 t - a^3 b}\right\} dt$$

hervorgeht. Durch Integration ergibt sich

$$-x \operatorname{tg} \alpha = t + \frac{2a^4 + (a^3 - m^3)b}{(3b + 4a)a^2} \ln \frac{t - a}{\sqrt{(b + 2a)t^2 + a(b + 2a)t + a^2 b}}$$

$$+ \frac{a\{4a^5 + 2a^4 b - a^3 b^2 + 2abm^3 + b^2 m^3\}}{2(3b + 4a)a^2} \int \frac{dt}{(b + 2a)t^2 + a(b + 2a)t + a^2 b} + C.$$

Vor Berechnung des letzten Integrals ist zu untersuchen, ob der im Nenner stehende Ausdruck zweiten Grades reelle oder komplexe Faktoren hat; die Diskriminante dieses Ausdrucks ist $a^2(b + 2a)(2a - 3b)$, also negativ, denn es wird stets $3b > 2a$ sein. Daher ist anzunehmen, daß der unter dem Integralzeichen auftretende Nenner komplexe Faktoren hat. Bei Anwendung des Ergebnisses von Aufg. 4, S. 113 und unter der Annahme, daß die Wassertiefe am Wehr ($x = 0$) gleich H

1) Vgl. hierzu J. F. Bubendey, a. a. O. S. 540—543.

sei, erhält man schließlich zwischen der Abszisse x und der Wassertiefe t die Beziehung

$$x \operatorname{tg} \alpha = H - t + \frac{2a^4 + (a^3 - m^3)b}{(3b + 4a)a^2} \ln \frac{(H-a)\sqrt{(b+2a)t^2 + a(b+2a)t + a^2 b}}{(t-a)\sqrt{(b+2a)H^2 + a(b+2a)H + a^2 b}}$$

$$+ \frac{4a^5 + 2a^4 b - a^3 b^2 + 2abm^3 + b^2 m^3}{(3b+4a)a^2\sqrt{(b+2a)(3b-2a)}} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{(2H+a)\sqrt{b+2a}}{a\sqrt{3b-2a}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{(2t+a)\sqrt{b+2a}}{a\sqrt{3b-2a}} \right\}.$$

Geschwindigkeit chemischer Reaktionen.

Eine Beziehung zwischen der bei einem chemischen Vorgang innerhalb einer gewissen Zeit umgewandelten Stoffmenge und dieser Zeit selbst ist zum ersten Mal im Jahre 1850 von L. Wilhelmy bei einem bestimmten Beispiel, nämlich bei Untersuchung der Einwirkung von Säuren auf Rohrzucker mathematisch formuliert worden.[1]) Rohrzucker, der in verdünnter wässeriger Lösung mit einer Säure zusammengebracht wird, zerfällt nach Aufnahme von Wasser in Dextrose (Traubenzucker) und Laevulose (Fruchtzucker), während die Säure selbst im Verlauf der Reaktion ihre Konzentration nicht ändert, sondern nur als Beschleuniger der Reaktion, als sogenannter *Katalysator*[2]) wirkt:

$$\underset{\text{Rohrzucker}}{C_{12}H_{22}O_{11}} + \underset{\text{Wasser}}{H_2O} = \underset{\text{Dextrose}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{Laevulose}}{C_6H_{12}O_6}.$$

Würde man die Säure weglassen, so könnte der Verlauf der Reaktion wegen zu geringer Geschwindigkeit überhaupt nicht verfolgt werden.

Wilhelmy nimmt an, daß unter sonst gleichen Umständen die Menge Zucker dx, die sich während eines Zeitelements dt umwandelt, der noch vorhandenen Menge unveränderten Zuckers proportional sei, also eine Gleichung von der Form $dx = k(a-x)dt$ bestehe, wo k eine Konstante und a die zu Beginn der Reaktion vorhandene Zuckermenge bedeutet.

Den Verlauf der Umwandlung konnte Wilhelmy mit Hilfe eines *Saccharimeters von Soleil* kontrollieren, denn während der nicht inver-

1) Annalen der Physik und Chemie, hrsg. von Poggendorff, Bd. 81 (Bd. 21 der 3. Reihe), Leipzig 1850, S. 413; ein von W. Ostwald herausgegebener Abdruck bildet Heft 29 (Leipzig 1891) von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

2) Von dem griechischen Worte καταλύειν, auflösen. Übrigens gibt es auch negative Katalysatoren, Stoffe, die eine Reaktion verzögern, aber die Reaktionsbeschleuniger sind häufiger. Charakteristisch für einen Katalysator ist, daß seine Menge, verglichen mit der Menge der umzusetzenden Stoffe, äußerst gering ist und daß er selbst an der Reaktion scheinbar nicht teilnimmt, sondern aus ihr unverändert hervorgeht.

tierte Rohrzucker die Ebene des polarisierten Lichtes nach rechts dreht, ist die Mischung der Inversionsprodukte linksdrehend.

Die Inversion des Rohrzuckers ist ein Beispiel zur Anwendung des von C. M. Guldberg und P. Waage formulierten *Gesetzes der chemischen Massenwirkung.*[1]) Nach diesem ist die chemische Kraft, mit der zwei Stoffe aufeinander wirken, gleich dem mit einem „Affinitätskoeffizienten" multiplizierten Produkt ihrer „aktiven Massen". Hierbei ist die aktive Masse oder die Konzentration eines Stoffes diejenige Masse desselben, die in der Volumeinheit enthalten ist. Um zu zeigen, wie sich diese Konzentration durch Zahlen ausdrücken läßt, werde bemerkt, daß die chemisch wirkende Masse eines Stoffes durch sein Molekulargewicht dargestellt wird. Die Anzahl von Grammen, die mit der Zahl für das Molekulargewicht übereinstimmt, wird (nach Vorschlag von W. Ostwald) als *Grammolekül* oder *Mol* bezeichnet; daher ist die aktive Masse oder die Konzentration eines Stoffes gleich der Anzahl der in der Volumeinheit, einem Liter, enthaltenen Grammoleküle.[2]) Will man die aktive Masse berechnen, die sich in einem Volumen von V Litern einer Mischung befindet, so ist offenbar die in V enthaltene Menge des Stoffes in Grammolekülen auszudrücken und diese Zahl durch V zu dividieren.

Wenn sich z. B. zwei Stoffe A und B vermöge der zwischen ihnen bestehenden Reaktion in zwei andere A_1, B_1 umsetzen, so läßt sich die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, leicht formulieren, da diese nach dem Massenwirkungsgesetz von Guldberg und Waage dem Produkt der Konzentrationen proportional ist. Hier sind aber *zwei Fälle* zu unterscheiden. Erstens kann nämlich die Reaktion fortschreiten, bis die eine Molekülart ohne nachweisbaren Rest durch die Einwirkung der anderen umgesetzt ist, die Reaktion ist alsdann *nicht umkehrbar*. Der

---

1) Die hier zu erwähnenden Abhandlungen von Guldberg und Waage sind in den Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet in Christiania 1864, im Universitätsprogramm von Christiania für das 1. Semester 1867 und im 127. Bande von Erdmanns Journal für praktische Physik erschienen. Ein von R. Abegg herausgegebener Abdruck dieser Arbeiten bildet Heft 109 (Leipzig 1899) von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften; man beachte daselbst besonders S. 5—9, 21 f., 127 f., 135 ff. Übrigens hatte schon C. L. Berthollet im Jahre 1803 ausgesprochen, daß die zwischen mehreren Stoffen stattfindende chemische Wirkung nicht nur von der Affinität, sondern ganz besonders von den Mengenverhältnissen dieser Stoffe abhänge. Ferner finden sich die Ansichten von Guldberg und Waage, wenn auch nicht in ihrer Allgemeinheit erkannt, im wesentlichen ausgesprochen bei W. Esson in einer Abhandlung, die in den Philosophical Transactions of the royal society of London, Bd. 156 (Jahrgang 1866), S. 216 ff. erschienen ist; vgl. auch eine Arbeit von V. Harcourt und W. Esson, ebenda Bd. 157 (Jahrgang 1868), S. 117.

2) So ist z. B. ein Mol Sauerstoff (O_2) so viel wie 32 g Sauerstoff, denn das Atomgewicht von O beträgt 16; ebenso ist ein Mol Salzsäure (HCl) $= 1 + 35{,}45 = 36{,}45$ g Salzsäure, ein Mol Rohrzucker ($C_{12}H_{22}O_{11}$) $= 12 \cdot 12 + 22 \cdot 1 + 11 \cdot 16 = 342$ g Rohrzucker.

andere Fall ist der, daß die aus A und B hervorgegangenen Produkte A_1, B_1 in ihrer Wirkung aufeinander das Bestreben haben, wieder A und B zu bilden, die Reaktion ist alsdann *umkehrbar*. Man drückt dies durch eine Gleichung aus von der Form

$$A + B \rightleftarrows A_1 + B_1$$

und sagt, die Reaktion verlaufe im Sinne der Gleichung sowohl von links nach rechts wie von rechts nach links.

Es werde nun angenommen, daß nicht nur die Stoffe A und B, sondern auch die durch die Reaktion zwischen A und B gebildeten Stoffe A_1, B_1 schon anfangs in der Mischung vorhanden waren, und zwar seien a, b, a_1, b_1 die Anzahlen der in dem Volumen V der Mischung zu Beginn der Reaktion enthaltenen Grammoleküle der Stoffe A, B, A_1, B_1. Alsdann wird nach einer gewissen Zeit T ein stationärer Gleichgewichtszustand eintreten. Wie lange dies dauert, hängt nicht nur von dem betreffenden *Katalysator*, von der Affinität und den Konzentrationen der Stoffe A und B, bzw. A_1 und B_1 ab, sondern ganz wesentlich von der *Temperatur*; diese Zeitdauer T kann dementsprechend mehrere Stunden, aber auch viele Tage betragen, theoretisch ist $T = \infty$. Auch das Licht kann, wie allgemein bekannt ist (Photographie), eine Reaktion beeinflussen; gleiches gilt vom Druck, wenigstens bei Reaktionen zwischen Gasen.

Sind *bei Eintritt des Gleichgewichtszustandes* je x Mol der Stoffe A und B umgesetzt, so sind

$$\frac{a - x}{V}, \quad \frac{b - x}{V}, \quad \frac{a_1 + x}{V}, \quad \frac{b_1 + x}{V}$$

die endgültigen Konzentrationen und es besteht *alsdann* die Gleichung

$$\frac{k(a - x)(b - x)}{V^2} = \frac{k_1(a_1 + x)(b_1 + x)}{V^2}$$

oder

$$\frac{(a - x)(b - x)}{(a_1 + x)(b_1 + x)} = \frac{k_1}{k},$$

wo k und k_1 die zu A, B bzw. A_1, B_1 gehörigen Affinitätskoeffizienten oder Reaktionskonstanten (Geschwindigkeitskonstanten) bedeuten.

Diese chemische Umsetzung erfolgt aber keineswegs mit konstanter Geschwindigkeit, vielmehr ist nach Guldberg und Waage die Reaktionsgeschwindigkeit in einem bestimmten Zeitmoment t, d. h. t Zeiteinheiten nach dem zur Zeit $t = 0$ eingetretenen Beginn der Reaktion, gleich der Differenz

$$\frac{k(a - \xi)(b - \xi)}{V^2} - \frac{k_1(a_1 + \xi)(b_1 + \xi)}{V^2},$$

wenn zu dieser Zeit je ξ Mol der Stoffe A und B umgesetzt sind. Da unter der Geschwindigkeit, mit der die Reaktion zur Zeit t vor sich geht,

der Quotient aus der während eines Zeitelements dt umgesetzten Menge $d\xi$ und dem Zeitelement dt selbst verstanden wird, hat man die Gleichung

$$\frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = \frac{k(a-\xi)(b-\xi)}{V^2} - \frac{k_1(a_1+\xi)(b_1+\xi)}{V^2},$$

wenn die Geschwindigkeit auf die Einheit des Volumens der Mischung bezogen wird. Vermöge dieser Gleichung ist t gleich dem über einen Quotienten aus $d\xi$ und einer ganzen Funktion von ξ erstreckten Integral, so daß t mit Hilfe der Methode der Partialbruchzerlegung leicht berechnet werden kann. Die Integrationskonstante läßt sich bestimmen, wenn man beachtet, daß zur Zeit $t = 0$ auch $\xi = 0$ ist. So erhält man die Zeit t, die verfließen muß, bis eine gewisse Menge x umgesetzt ist, als Funktion von x, etwa $t = \varphi(x)$, und die Auflösung dieser Gleichung nach x beantwortet die Frage nach der zur Zeit t umgesetzten Menge x.[1])

Die meisten Beispiele zur mathematischen Verfolgung des Verlaufs einer Reaktion gehören dem Gebiet der *organischen* Chemie an, denn die Reaktionen anorganischer Stoffe verlaufen meist momentan.

1. Bevor solche Beispiele gegeben werden, deren Erledigung auf Integrationen mit Hilfe der Partialbruchzerlegung führt, werde ein Beispiel für einen nicht umkehrbaren chemischen Vorgang behandelt, bei dem allerdings keine Partialbruchzerlegung vorkommt, nämlich die schon S. 161 erwähnte *Inversion des Rohrzuckers,* der in verdünnter wässeriger Lösung mit einer Säure zusammengebracht wird. Bei hinreichender Verdünnung kann die aktive Menge des Wassers als konstant angesehen werden, denn nur eine geringe Menge Wasser wird chemisch verbraucht; die beigefügte Säure wirkt überhaupt nur katalysatorisch, beteiligt sich also außerdem nicht an der Reaktion. Enthält ein Volumen von V Litern anfänglich a Mol Rohrzucker, so besteht hier eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = \frac{k(a-\xi)}{V} \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = k(a-\xi).$$

Es soll nun die zur Zeit t umgesetzte Menge x als Funktion von t dargestellt werden, und umgekehrt t als Funktion von x.

Man erhält

$$(2) \qquad t = \int_0^x \frac{d\xi}{k(a-\xi)} = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x},$$

oder bei Einführung der gewöhnlichen Logarithmen

$$(2\text{ a}) \qquad t = \frac{1}{k}\cdot 2{,}30259\log\frac{a}{a-x}$$

---

1) Zum näheren Studium der Theorie der Geschwindigkeit chemischer Reaktionen sei verwiesen auf das Kapitel über chemische Kinetik in dem Werke von W. Nernst, Theoretische Chemie, 7. Aufl., Stuttgart 1913, S. 579—617.

denn es ist $\ln \frac{a}{a-x} = \frac{1}{M} \log \frac{a}{a-x}$, wo M den Modul 0,43429 der gewöhnlichen Logarithmen, $1 : M$ die Zahl 2,30259 bedeutet.[1])

Die Auflösung der Gleichung (2) nach x ergibt

$$x = a(1 - e^{-kt}). \tag{3}$$

Der Ausdruck (1) für die Reaktionsgeschwindigkeit zeigt, daß diese allmählich kleiner wird. Nach einer gewissen Zeit, theoretisch allerdings erst für $t = \infty$, hört die Reaktion auf, die ganze vorhandene Menge a des Rohrzuckers ist umgewandelt. Wird in (2) $x = \frac{1}{2} a$ gesetzt, so folgt $t = \frac{1}{k} \ln 2$, d. h. der mit $\ln 2 = 0{,}6931$ multiplizierte reziproke Wert von k gibt die Zeit an, die zur Inversion der Hälfte des vorhandenen Rohrzuckers notwendig ist.[2])

Bei der experimentellen Prüfung der Richtigkeit der Gleichung (2) beachte man, daß $\frac{1}{t} \ln \frac{a}{a-x}$ konstant sein muß. Natürlich darf sich die Temperatur während des ganzen Vorganges nicht ändern, denn mit einer solchen Änderung würde die Konstante k einen anderen Wert annehmen.

An Stelle von a und x kann man auch die im Saccharimeter gemessenen *Drehungswinkel* einführen.[3]) Es sei nämlich α_0 der zur Zeit $t = 0$ im Polarisationsapparat angezeigte Winkel; nach Inversion der ganzen Zuckermenge sei α_∞ der abgelesene Winkel, somit $\alpha_0 - \alpha_\infty$ die gesamte Drehung. Zeigt der Apparat zur Zeit t den Winkel α an, so ist $\alpha_0 - \alpha$ die zugehörige Drehung. Nun sind diese Ausdrücke den invertierten Zuckermengen proportional, somit $\alpha_0 - \alpha_\infty$ und $\alpha_0 - \alpha$ zu a bzw. zu x proportional und $\alpha - \alpha_\infty$ zu $a - x$. Die Gleichung (2 a) kann daher auch durch

$$t = \frac{1}{k} \cdot 2{,}30259 \log \frac{\alpha_0 - \alpha_\infty}{\alpha - \alpha_\infty} \tag{4}$$

ersetzt werden. Eine andere Form der Gleichungen (2) und (4) ist

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{a - x_1}{a - x_2} = \frac{1}{k} \ln \frac{\alpha_1 - \alpha_\infty}{\alpha_2 - \alpha_\infty}, \tag{5}$$

---

1) Vgl. Teil I, S. 81. W. Ostwald hat im Journal für praktische Chemie, Bd. 137, neue Folge Bd. 29 (1884), S. 406—408 eine Tafel veröffentlicht, die die zu den Werten von $x : a = 0{,}001$ bis $x : a = 0{,}999$ gehörigen gewöhnlichen Logarithmen von

$$a : (a - x) = 1 : \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

enthält.

2) Vgl. zu dieser Bemerkung W. Nernst, Theoretische Chemie, 7. Aufl., Stuttgart 1913, S. 581. Vgl. ferner Gleichung (4), in Aufg. 25, S. 71.

3) Vgl. die Bemerkungen auf S. 161 f. zu Wilhelmys Untersuchungen.

wo x_1 und x_2 die zu den Zeiten t_1 bzw. t_2 invertierten Zuckermengen, α_1 und α_2 die zugehörigen abgelesenen Winkel bedeuten.

Es wurde schon vorhin bemerkt, daß bis zur Inversion der gesamten Zuckermenge theoretisch eine unendlich lange Zeit verfließen müßte; *praktisch* wird man in vielen Fällen annehmen dürfen, daß die Reaktion beendigt ist, wenn nur noch 0,1% des ursprünglichen Stoffes vorhanden ist. Die Formel (2 a) geht für diesen Fall über in

$$t = \frac{1}{k} \cdot 2{,}30259 \log \frac{a}{0{,}001\, a} = \frac{3 \cdot 2{,}30259}{k} = \frac{6{,}908}{k}.$$

Um zu zeigen, wie die auf Grund der Ergebnisse eines Experimentes durchgeführte Berechnung von $\frac{1}{t} \cdot 2{,}30259 \log \frac{\alpha_0 - \alpha_\infty}{\alpha - \alpha_\infty}$ wirklich nach (4) nahezu konstante Werte k ergibt, stellen wir einige Zahlenwerte in einer Tafel zusammen, deren beide ersten Spalten einer Arbeit von Ostwald entnommen sind.[1])

t (Minuten)	α, beobachtet	$10^4 \log \frac{\alpha_0 - \alpha_\infty}{\alpha - \alpha_\infty}$	$10^4 k$
0	25,02	0	
58	20,17	687	27,28
114	16,25	1335	26,96
197	11,32	2316	27,08
263	8,28	3055	26,75
394	3,32	4619	26,99
585	— 1,43	6949	27,35
∞	— 8,12	∞	—

Bei diesem Versuch wurde die verdünnte Zuckerlösung mit Schwefelsäure zusammengebracht. Die erste Spalte enthält die Zeit t in Minuten, die zweite die zugehörigen, am Saccharimeter abgelesenen Winkel in Graden. Daher ist $\alpha_0 = 25^0{,}02$. Der Betrag $\alpha_\infty = -8^0{,}12$ entspricht theoretisch der Zeit $t = \infty$, praktisch einer Zeit, zu der die Inversion merklich vollendet war. Zur größeren Übersichtlichkeit enthalten die dritte und vierte Kolumne die mit 10000 multiplizierten Werte von $\log \frac{\alpha_0 - \alpha_\infty}{\alpha - \alpha_\infty} = \log \frac{33{,}14}{\alpha + 8{,}12}$, bzw. von k; als Mittelwert von $10000\, k$ findet man 27,07.

2. In dem soeben betrachteten Beispiel der Zuckerinversion änderte sich nur *eine* Molekülgattung, es lag eine unimolekulare Reaktion vor. In vielen Fällen ändern sich zwei Molekülgattungen A und B in A_1 und B_1 (bimolekulare Reaktion). Dabei möge zunächst angenommen

1) Journal für praktische Chemie, Bd. 137, neue Folge Bd. 29 (1884), S. 394.

werden, daß die Reaktion nicht umkehrbar ist. Alsdann besteht nach S. 164 die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_1(a-\xi)(b-\xi)}{V^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = k(a-\xi)(b-\xi),$$

wenn $k_1 : V = k$ gesetzt wird. Welche Beziehung findet nun zwischen der nach Verlauf der Zeit t umgesetzten Menge $\xi = x$ und der Zeit t selbst statt, wenn $t = 0$ und $\xi = 0$ zusammengehörige Werte sind?

Man findet

$$(2)\qquad t = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)},$$

daher ist nun

$$(3)\qquad \frac{1}{t(b-a)} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)} = k.$$

Die Auflösung nach x ergibt

$$(4)\qquad x = \frac{ab\left(e^{akt} - e^{bkt}\right)}{ae^{akt} - be^{bkt}}.$$

Sind x_1 und x_2 die zu den Zeiten t_1 und t_2 umgewandelten Mengen, so besteht die Gleichung

$$(5)\qquad t_2 - t_1 = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{(a-x_1)(b-x_2)}{(a-x_2)(b-x_1)}.$$

Da nach (1) für $\xi = 0$ die Ableitung $\frac{d\xi}{dt}$ gleich $k \cdot ab$ ist, gibt k die Reaktionsgeschwindigkeit an, wenn die Konzentrationen der ursprünglich vorhandenen Stoffmengen gleich der Einheit sind und durch irgendeine Vorrichtung dafür gesorgt wird, daß diese Konzentrationen unverändert bleiben, also die entstehenden Reaktionsprodukte immer entfernt und die umgesetzte Menge der ursprünglich vorhandenen Stoffe immer wieder ersetzt wird.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der unimolekularen und bimolekularen Reaktion besteht darin, daß bei der erstgenannten die Konstante k von der Konzentrationseinheit unabhängig ist, während sich bei der bimolekularen Reaktion die Konstante k mit der Konzentrationseinheit ändert. Dies folgt daraus, daß der in (2), S. 164 auftretende Faktor $\ln \frac{a}{a-x}$ unverändert bleibt, wenn a und x durch na und nx ersetzt werden; hingegen ändert sich der Ausdruck (3), S. 167, wenn man in ihm a, b, x durch na, nb, nx ersetzt.

Ein Beispiel einer *bimolekularen Reaktion* bietet die *Verseifung von Essigester (Äthylacetat)*. Eine wässerige Lösung von Äthylacetat, die mit Natriumhydroxyd zusammengebracht wird, verwandelt sich allmählich in Äthylalkohol und Natriumacetat:

$$\underset{\text{Äthylacetat}}{C_2H_3O_2C_2H_5} + \underset{\text{Natriumhydroxyd}}{NaOH} = \underset{\text{Äthylalkohol}}{C_2H_5OH} + \underset{\text{Natriumacetat}}{CH_3COONa}.$$

Diese Zersetzung zusammengesetzter Äther (Ester) durch Alkalien oder durch Wasser wird als Verseifung bezeichnet.[1])

3. Wie lautet das Ergebnis, wenn in dem soeben behandelten allgemeinen Fall die Stoffe A und B in äquivalenten Mengen ($a = b$) vorhanden sind?

Hier wird $\frac{d\xi}{dt} = k(a - \xi)^2$, daher ergibt sich

$$t = \frac{x}{ak(a-x)}, \quad x = \frac{a^2kt}{1 + akt}.$$

4. Man untersuche die bimolekulare Reaktion in dem Fall, daß der Stoff B in überwiegend größerer Konzentration vorhanden ist als der Stoff A, so daß a und x bei $b - a$ und $b - x$ vernachlässigt werden können.

Die Gleichung (2), S. 167 verwandelt sich jetzt in

$$t = \frac{1}{kb}\ln\frac{a}{a-x} = \frac{1}{K}\ln\frac{a}{a-x},$$

im wesentlichen dieselbe Formel wie bei der unimolekularen Reaktion (Gleichung (2), S. 164). Der Faktor b des Nenners zeigt, daß die Geschwindigkeitskonstante $K = kb$ nun von der Verdünnung abhängt, was bei den unimolekularen Reaktionen nicht der Fall ist.

Eigentlich ist die schon betrachtete Inversion des Rohrzuckers (S. 161) eine solche bimolekulare Reaktion, denn Rohrzucker *und* Wasser sind beteiligt; da das Wasser jedoch in so sehr überwiegender Menge vorhanden ist, daß diese als konstant angesehen werden kann, verläuft die Reaktion wie eine unimolekulare.

5. Man untersuche die *umkehrbare bimolekulare Reaktion*, durch die sich zwei Stoffe A und B in zwei andere A_1, B_1 umwandeln, die das Bestreben haben wieder A und B zu bilden; die Stoffe A und B seien in äquivalenten Mengen vorhanden, also von jedem die gleiche Anzahl Mol.

Nach den Bemerkungen auf S. 164 ist nunmehr

$$\frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = \frac{k(a-\xi)(b-\xi) - k_1\xi^2}{V^2}.$$

Da äquivalente Mengen vorhanden sein sollen, möge $a = b = 1$ gesetzt werden, alsdann erhält man

$$V\frac{d\xi}{dt} = k(1-\xi)^2 - k_1\xi^2.$$

1) Näheres zu dem erwähnten Beispiel findet man u. a. bei R. B. Warder, Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, 14. Jahrgang (Berlin 1881), S. 1361—1365; L. Th. Reicher, Liebigs Annalen der Chemie, Bd. 228 (1885), S. 257—287; Bd. 238 (1887), S. 276—286.

Bei Einführung von $k_1 : k = \alpha$ wird

$$t = \frac{V}{k}\int \frac{d\xi}{(1-\alpha)\xi^2 - 2\xi + 1} = \frac{V}{k(1-\alpha)}\int \frac{d\xi}{(\xi - x_1)(\xi - x_2)},$$

wo x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $(1-\alpha)\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$ sind, nämlich

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1 \pm \sqrt{\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1 \mp \sqrt{\alpha}}, \quad x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$t = \frac{V}{2k\sqrt{\alpha}} \ln \frac{x - x_1}{x - x_2} + C,$$

wo $C = -\frac{V}{2k\sqrt{\alpha}} \ln \frac{x_1}{x_2}$ gefunden wird. So folgt

$$t = \frac{V}{2k\sqrt{\alpha}} \ln \frac{(x - x_1)x_2}{(x - x_2)x_1}, \quad x = \frac{x_1 x_2 \left(e^{\frac{kt\sqrt{\alpha}}{V}} - e^{-\frac{kt\sqrt{\alpha}}{V}}\right)}{x_1 e^{\frac{kt\sqrt{\alpha}}{V}} - x_2 e^{-\frac{kt\sqrt{\alpha}}{V}}}.$$

Die Gleichung für den Endzustand $k(1-X)^2 - k_1 X^2 = 0$ (S. 164) liefert

$$k_1 : k = \alpha = \frac{(1-X)^2}{X^2}, \quad X = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}} = x_2.$$

Ein hierher gehöriges Beispiel ist die *Esterbildung*. Bei Mischung von Essigsäure mit Alkohol entsteht Äthylacetat[1]) und Wasser:

$$\underset{\text{Essigsäure}}{CH_3 \cdot COOH} + \underset{\text{Äthylalkohol}}{C_2H_5OH} \rightleftarrows \underset{\text{Äthylacetat}}{CH_3COOC_2H_5} + \underset{\text{Wasser}}{H_2O};$$

da vorhin $a = b = 1$ angenommen wurde, wäre im Verhältnis von 1 Mol Essigsäure (60 gr) auf 1 Mol Äthylalkohol (46 gr) zu mischen. Es zeigte sich, daß der Stillstand der Reaktion eintrat, nachdem zwei Drittel der ursprünglich vorhandenen Mengen umgewandelt waren. Die Mischung hat alsdann die Zusammensetzung:

$\frac{1}{3}$ Mol Essigsäure + $\frac{1}{3}$ Mol Äthylalkohol + $\frac{2}{3}$ Mol Äthylacetat + $\frac{2}{3}$ Mol Wasser.

1) Die essigsauren Salze oder Acetate entstehen, wenn man in der Essigsäure $CH_3 \cdot COOH$ den Wasserstoff der Gruppe COOH durch Metalle ersetzt; wird bei der Essigsäure der Wasserstoff dieser Gruppe durch Äthyl, d. h. durch die Atomgruppe C_2H_5, ersetzt, so entsteht Äthylacetat. Die Ester entstehen allgemein durch Verbindung der Alkoholradikale mit Säuren unter Austritt von Wasser.

Daher ist $X = x_2 = 2:3$, somit $1 + \sqrt{\alpha} = 3:2$ oder $\alpha = k_1 : k = 1:4$; ferner wird $x_1 = 1:(1-\sqrt{\alpha}) = 2$ und

$$t = \frac{V}{k} \ln \frac{2-x}{2-3x}, \quad k = \frac{4}{3}(k - k_1) = \frac{V}{t} \ln \frac{2-x}{2-3x}.$$

Da das Volumen der Mischung durch die Esterbildung kaum geändert wird, ist also nun der Ausdruck $\frac{1}{t} \ln \frac{2-x}{2-3x}$ konstant.

In nachstehender Tafel werden einige Werte von t und x mitgeteilt, die die Ergebnisse der Beobachtungen von Guldberg und Waage bei Esterbildung darstellen[1]); dabei ist die Zeit t in Tagen ausgedrückt. Die dritte Spalte der Tafel enthält die Werte der zugehörigen Größe

$$K = \frac{1}{t} \log \frac{2-x}{2-3x}.$$

t (Tage)	x	$K = \frac{1}{t} \log \frac{2-x}{2-3x}$
10	0,087	0,00414
19	0,121	0,00315
41	0,200	0,00266
64	0,250	0,00228
103	0,345	0,00227
137	0,421	0,00242
167	0,474	0,00252
190	0,496	0,00246
∞	0,667	

Man erkennt, daß erst von $t = 41$ an K nahezu konstant ist; als Mittelwert von K findet man 0,00274, und wenn die Zahlen K erst von $t = 41$ an berücksichtigt werden, ist 0,00243 der Mittelwert von K. Das verhältnismäßig späte Eintreten nahezu konstanter Werte von K schreiben Guldberg und Waage gewissen sekundären Wirkungen und besonders dem Umstand zu, daß sich Äther und Wasser nur schwierig zu einer homogenen Lösung vereinigen lassen.

Da $k_1 : k$ für alle Verhältnisse der Stoffmengen von Essigsäure und Äthylalkohol denselben Wert beibehält, kann man mit Hilfe von $k_1 : k = 1:4$ bestimmen, wieviel Bruchteile dieser Mengen sich bei irgend einem Mischungsverhältnis umsetzen werden. Mischt man z. B. a Äquivalente Essigsäure mit b Äquivalenten Äthylalkohol, so besteht die Gleichung:

$$\frac{(a-X)(b-X)}{X^2} = k_1 : k = 1:4,$$

1) Journal für praktische Chemie, Bd. 127, neue Folge Bd. 19 (1879), S. 83; Ostwalds Klassiker Nr. 104, Leipzig 1899, S. 139. In dieser Abhandlung findet man noch zahlreiche weitere Beispiele.

aus der

$$X = \frac{2}{3}\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}\right)$$

folgt; somit werden

$$\frac{100\,X}{a} = \frac{2}{3\,a}\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}\right) \cdot 100 \text{ Prozent}$$

der vorhandenen Essigsäure verestert.

6. Man untersuche den schon S. 163 und 164 erwähnten Fall, daß die vier Stoffe A, B, A_1, B_1 gemischt werden, wobei nun die Reaktion zwischen A und B die Stoffe A_1, B_1 liefert, die Reaktion zwischen A_1 und B_1 die Stoffe A, B.

Hier ist, wenn die Zahlen a, b, a_1, b_1 wieder auf die Volumeinheit bezogen werden:

$$\frac{d\xi}{dt} = k(a - \xi)(b - \xi) - k_1(a_1 + \xi)(b_1 + \xi),$$

$$t = \int_0^x \frac{d\xi}{(k - k_1)\xi^2 - \{(a + b)k + (a_1 + b_1)k_1\}\xi + kab - k_1 a_1 b_1}$$

$$= \frac{1}{(k - k_1)(x_1 - x_2)} \ln\left\{\frac{(x - x_1)\,x_2}{(x - x_2)\,x_1}\right\},$$

wo x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(k - k_1)\xi^2 - \{(a + b)k + (a_1 + b_1)k_1\}\xi + kab - k_1 a_1 b_1 = 0$$

sind.

7. Es soll der Verlauf der Reaktion berechnet werden, wenn *drei* Stoffe A, B, C in verschiedenen Mengen von a Mol, b Mol, c Mol vorhanden sind *(trimolekulare Reaktion)* und die Reaktion nicht umkehrbar ist.

Hier wird $\frac{d\xi}{dt} = k(a - \xi)(b - \xi)(c - \xi)$,

$$t = -\frac{1}{k(a - b)(b - c)(c - a)} \ln\left\{\left(\frac{a}{a - x}\right)^{b - c} \cdot \left(\frac{b}{b - x}\right)^{c - a} \cdot \left(\frac{c}{c - x}\right)^{a - b}\right\}.$$

8. Man untersuche die trimolekulare Reaktion, für die

$$\frac{d\xi}{dt} = k(a - \xi)(b - \xi)^2$$

ist.

Man erhält

$$t = \frac{1}{k(a - b)^2}\left\{\ln\frac{b - x}{a - x} + \frac{a - b}{b - x}\right\} + C.$$

Da die Integrationskonstante C gleich $\frac{-1}{k(a-b)^2}\left\{\ln\frac{b}{a}+\frac{a-b}{b}\right\}$ gefunden wird, ergibt sich schließlich

$$t=\frac{1}{k(a-b)^2}\left\{\ln\frac{(b-x)a}{(a-x)b}+\frac{(a-b)x}{b(b-x)}\right\}.$$

9. Wie vereinfacht sich das vorstehende Ergebnis bei äquivalenten Mengen ($b=a$)?

Man erhält

$$\frac{d\xi}{dt}=k(a-\xi)^2$$

und

$$kt=\frac{x(2a-x)}{2a^2(a-x)^2},\quad x=a\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+2a^2kt}}\right).$$

Ein Beispiel hierzu bietet die Einwirkung von Eisenchlorid auf Zinnchlorür auf Grund der Formel:

$$\underset{\text{Eisenchlorid}}{2\,FeCl_3}+\underset{\text{Zinnchlorür}}{SnCl_2}=\underset{\text{Eisenchlorür}}{2\,FeCl_2}+\underset{\text{Zinnchlorid}}{SnCl_4}.$$

Aus Versuchen von A. A. Noyes sei folgende Zahlentafel angeführt[1]), in der die letzte Spalte den nach der Formel

$$k=\frac{x(2a-x)}{t\cdot 2a^2(a-x)^2}$$

berechneten Wert der Konstanten k darstellt. Dabei ist t in Minuten ausgedrückt, a ist 0,0625.

t	x	$a-x$	k
1	0,01 434	0,04 816	87,6
1,75	0,01 998	0,04 252	84,9
3	0,02 586	0,03 664	81,5
4,5	0,03 076	0,03 174	81,8
7	0,03 612	0,02 638	84,4
11	0,04 102	0,02 148	86,9
17	0,04 502	0,01 748	88,7
25	0,04 792	0,01 458	89,0
40	0,05 058	0,01 192	84,8

Der Mittelwert von k beträgt 85,5.

1) Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. 16 (1895), S. 550.

§ 9.

Integration gewisser Differentiale, die Wurzeln aus linearen Funktionen von x enthalten; Integration binomischer Differentiale.

1. Es bezeichne R eine rationale Funktion der diesem Funktionszeichen begefügten Größen. Alsdann ist

$$R(x^p, x^q, x^r, \ldots),$$

wo $p, q, r, \ldots$ irgend welche echte oder unechte Brüche bedeuten, rational in $x^p, x^q, x^r, \ldots$, aber eine *irrationale Funktion* von x. Durch die Substitution $x = z^n$, wo n den Hauptnenner der gleichnamig gemachten Brüche $p, q, r, \ldots$ bedeutet, geht

$$\int R(x^p, x^q, x^r, \ldots)\, dx$$

in ein über eine rationale Funktion von z erstrecktes Integral über und kann hierauf nach den in § 8 gegebenen Regeln erledigt werden.

2. Das Integral

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right) dx$$

geht durch die Substitution

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$$

in ein Integral einer rationalen Funktion von z über.

3. Das Integral

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}, \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}, \ldots\right) dx$$

geht durch die Substitution

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^N,$$

wo N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten $n, q, \ldots$ bedeutet, in das Integral einer rationalen Funktion über.

4. Unter einem *binomischen Integral* versteht man den Ausdruck

$$J = \int x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

wo m, n, p beliebige rationale Zahlen sind. In folgenden drei Fällen läßt sich J in endlicher Form darstellen, indem man auf algebraische Funktionen und Logarithmen oder zyklometrische Funktionen geführt wird:

a) Ist p eine ganze Zahl, während m und n Brüche bezeichnen, so führt die Substitution $x = z^N$ zum Ziel, wo N den zu den Brüchen m und n gehörigen Hauptnenner bedeutet. Ist insbesondere p eine ganze positive Zahl, so wird man die Integration dadurch erledigen, daß man $(a + bx^n)^p$ nach dem binomischen Satze entwickelt, jedes Glied der so entstehenden endlichen Reihe mit x^m multipliziert und dann gliedweise integriert.

b) Ist $(m+1):n$ eine ganze Zahl, so benutzt man die Substitution $a + bx^n = z$.

c) Ist $(m+np+1):n$ eine ganze Zahl, so benutzt man die Substitution $ax^{-n} + b = z$. Dieser Fall c) geht aus b) hervor, wenn man den Integranden in der Form $x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx$ schreibt.

Beispiele.

1. $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\,dx, \quad x = z^6,$$

$$J = 6\int \frac{z^5\,dz}{z-1} = 6\int\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1}\right)dz$$
$$= 6\left\{\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + \ln\left(\sqrt[6]{x} - 1\right)\right\}.$$

2. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}\,dx, \quad x = z^6,$$

$$J = 6\int \frac{dz}{z^2+z} = 6\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} = \ln\frac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}.$$

3. $$\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}, \quad x = z^{12},$$

$$J = 12\int\frac{dz}{z^2(z+1)} = 12\int\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}\right)dz = 12\left(\ln\frac{z+1}{z} - \frac{1}{z}\right)$$
$$= 12\left\{\ln\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}} - \frac{1}{\sqrt[12]{x}}\right\} = \ln\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^{12}}{x} - \frac{12}{\sqrt[12]{x}}.$$

4. Nimmt die Temperatur Θ eines Körpers — gemessen etwa in Celsiusgraden — durch Strahlung nach außen während des Zeitelementes dt um den Betrag $d\Theta$ ab, so kann der Quotient $\frac{d\Theta}{dt}$ als *Erkaltungsgeschwindigkeit* des Körpers bezeichnet werden. Unter der bei schwächeren Erwärmungen gestatteten Annahme, daß die Ausstrahlung

proportional dem Unterschied zwischen der Temperatur des Körpers und der Temperatur seiner Umgebung sei, fand L. Lorenz in Kopenhagen für diese Geschwindigkeit die Formel[1]):

$$\frac{d\Theta}{dt} = -h\Theta\left(1+\eta\Theta^{\frac{1}{4}}\right),$$

wo h und η dem betreffenden Körper eigentümliche Konstanten sind. Man berechne hiernach die Zeitdauer t_1 des Erkaltens von der Temperatur Θ_0, die dem Zeitmoment $t = 0$ zugehört, bis zur Temperatur Θ_1.

Man findet

$$t_1 = -\frac{1}{h}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1} \frac{d\Theta}{\Theta(1+\eta\sqrt[4]{\Theta})}$$

und erhält durch die Substitution $+\sqrt[4]{\Theta} = z$ das Integral eines rationalen Differentials:

$$t_1 = -\frac{4}{h}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{z(1+\eta z)} = -\frac{4}{h}\int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{1}{z} - \frac{\eta}{1+\eta z}\right)dz = \frac{4}{h}\left[\ln\frac{1+\eta z}{z}\right]_{z_0}^{z_1}$$

$$= \frac{4}{h}\left[\ln(z^{-1}+\eta)\right]_{z_0}^{z_1} = \frac{4}{h}\ln\frac{\Theta_1^{-\frac{1}{4}}+\eta}{\Theta_0^{-\frac{1}{4}}+\eta}.$$

L. Lorenz prüfte diese Formel u. a. durch einen Versuch mit einem horizontal in der Luft aufgehängten, mit Quecksilber gefüllten Zylinder aus gefirnißtem Messingblech, der eine Länge von 15,85 cm, einen Durchmesser von 3,82 cm hatte. Dabei war $h = 0{,}000\,2463$, $\eta = 0{,}63$, $\Theta_0 = 12^0{,}9$. Er gelangte zu folgenden Ergebnissen, die eine sehr gute Übereinstimmung von Rechnung und Beobachtung aufweisen:

Temperatur Θ	$9^0,9$	$6^0,9$	$2^0,4$	$1^0,4$
Zugehörige Zeitdauer in Sekunden als Ergebnis der Rechnung .	498,7	1207,4	3470,1	4732,75
als Ergebnis der Beobachtung	496	1207	3473	4733

5. $$\int\frac{dx}{+\sqrt{ax+b}+c}, \quad +\sqrt{ax+b} = z,$$

$$J = \frac{2}{a}\int\frac{z\,dz}{z+c} = \frac{2}{a}(z - c\ln(z+c))$$

$$= 2a\{+\sqrt{ax+b} - c\ln(\sqrt{ax+b}+c)\}.$$

1) Annalen der Physik und Chemie, hrsg. von G. Wiedemann, neue Folge Bd. 13 (1881), S. 589.

6. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b^2}}, \quad ax + b^2 = z^2,$$

$$J = 2\int \frac{dz}{z^2 - b^2} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z+b}\right) dz = \frac{1}{b} \ln \frac{\sqrt{ax+b^2} - b}{\sqrt{ax+b^2}+b}.$$

Man erkennt, daß die Integration auf eine zyklometrische Funktion führen würde, wenn der Radikand $ax - b^2$ statt $ax + b^2$ lauten würde.

7. $$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}, \quad \frac{1-x}{1+x} = z^2, \quad x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{-4z\,dz}{(1+z^2)^2},$$

$$J = 4\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-1)(z^2+1)} = 4\int\left\{-\frac{1}{4(1-z)} - \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2(z^2+1)}\right\} dz$$

$$= \ln\frac{1-z}{1+z} + 2 \operatorname{arc\,tg} z = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

8. $$\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx, \quad 1 + x = z^6,$$

$$J = 6\int \{(z^6-1)^2 z^3 + z^6\}\, dz = 6z^4\left\{\frac{1}{16}z^{12} - \frac{1}{5}z^6 + \frac{1}{7}z^3 + \frac{1}{4}\right\}$$

$$= 6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left\{\frac{1}{16}(1+x)^2 - \frac{1}{5}(1+x) + \frac{1}{7}\sqrt{1+x} + \frac{1}{4}\right\}.$$

9. $$\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{1}{6}}\right)^3 dx.$$

$$J = \int\left(x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{6}} + 3 - x^{\frac{1}{6}}\right) dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{18}{5}x^{\frac{5}{6}} + 3x - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}.$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2} dx.$$

Die Substitution $x = z^4$ ergibt

$$J = 4\int \frac{z}{(1+z)^2} dz = 4\int\left(-\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1}\right) dz$$

$$= 4\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} + \ln(\sqrt[4]{x}+1)\right\}.$$

11. $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Bei diesem binomischen Integral ist, mit $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ verglichen, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{6}$, daher $(m+1):n=3$ eine ganze Zahl. Nach Regel **4** b, S. 174 setzt man daher $1+x^{\frac{1}{6}}=z$ und findet

$$J=6\int(z-1)^2 z^{\frac{1}{3}}\,dz=\frac{9}{70}(14z^2-40z+35)z\sqrt[3]{z}$$

$$=\frac{9}{70}\{14(1+\sqrt[6]{x})^2-40(1+\sqrt[6]{x})+35\}(1+\sqrt[6]{x})^{\frac{4}{3}}.$$

12. $$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Die Substitution $1+x^2=z$ ergibt

$$J=\int\frac{z-1}{2\sqrt{z}}\,dz=\frac{1}{3}\sqrt{z}\,(z-3)=\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}.$$

13. $$\int\frac{x}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Hier ist $m=1$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$, also $(m+1):n$ eine ganze Zahl. Die Substitution $a+bx^2=z$ ergibt

$$J=\frac{1}{2b}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz=-\frac{1}{b}\,\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

14. $$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}=\int(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

Hier ist $m=0$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$, also $(m+1):n$ keine ganze Zahl, wohl aber $(m+np+1):n=-1$. Man hat

$$\int\left(\frac{ax^2}{x^2}+bx^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\int x^{-3}(b+ax^{-2})^{-\frac{3}{2}}\,dx;$$

die Substitution $b+ax^{-2}=z$ (vgl. Regel **4**c, S. 174) ergibt

$$J=-\frac{1}{2a}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz=\frac{1}{a\sqrt{z}}=\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}.$$

15. $$\int\sqrt{x(a+k^2x^3)}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}(a+k^2x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Hier ist $m=\frac{1}{2}$, $n=3$, $p=\frac{1}{2}$, also $(m+np+1):n=1$ eine ganze Zahl. Es folgt

$$J=\int x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ax^3}{x^3}+k^2x^3\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int x^2(ax^{-3}+k^2)^{\frac{1}{2}}\,dx;$$

die Substitution $ax^{-3} + k^2 = z$ ergibt

$$J = -\frac{a}{3}\int \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(z-k^2)^2}\,dz,$$

woraus durch die weitere Substitution $z = u^2$ das Integral

$$J = -\frac{2a}{3}\int \frac{u^2\,du}{(u^2-k^2)^2}$$

eines rationalen Differentials hervorgeht. Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$J = -\frac{a}{6}\int\left\{\frac{1}{(u-k)^2} + \frac{1}{k(u-k)} + \frac{1}{(u+k)^2} - \frac{1}{k(u+k)}\right\}du$$

$$\frac{a}{6}\left\{\frac{1}{u-k} + \frac{1}{u+k} + \frac{1}{k}\ln\frac{u+k}{u-k}\right\},$$

wo noch $u = \sqrt{ax^{-3}+k^2} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{a+k^2x^3}{x}}$ einzutragen ist.

16. Bei den in Regel **4**, S. 173 f. erwähnten drei Fällen, in denen sich

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = J(m,n,p)$$

in endlicher Form darstellen läßt, gelangt man oft rascher unter Anwendung von *Reduktionsformeln* zum Ziel, bei denen die Exponenten m und p durch andere von kleinerem absoluten Werte ersetzt sind. Man leite mit Hilfe der teilweisen Integration folgende Reduktionsformeln ab:

$$(1)\quad J(m,n,p) = \frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p - \frac{bnp}{m+1}J(m+n,n,p-1),\quad m+1 \neq 0,$$

$$(2)\quad J(m,n,p) = \frac{x^{m-n+1}}{bn(p+1)}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{bn(p+1)}J(m-n,n,p+1),\quad p+1 \neq 0,$$

$$(3)\quad J(m,n,p) = \frac{x^{m+1}}{m+np+1}(a+bx^n)^p + \frac{anp}{m+np+1}J(m,n,p-1),\quad m+np+1 \neq 0,$$

$$(4)\quad J(m,n,p) = \frac{x^{m-n+1}}{b(m+np+1)}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}J(m-n,n,p),\quad m+np+1 \neq 0,$$

$$(5)\quad J(m,n,p) = \frac{-x^{m+1}}{an(p+1)}(a+bx^n)^{p+1} + \frac{m+np+n+1}{an(p+1)}J(m,n,p+1),\quad p+1 \neq 0,$$

$$(6)\quad J(m,n,p) = \frac{x^{m+1}}{a(m+1)}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{b(m+np+n+1)}{a(m+1)}J(m+n,n,p),\quad m+1 \neq 0.$$

Formel (1) ergibt sich sofort, wenn man in $J(m, n, p)$ die Größe $(a + bx^n)^p = u$, $x^m\,dx = dv$ setzt und nun die Gleichung

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

(vgl. Regel **2**, S. 64) anwendet.

Formel (2) geht hervor, wenn man J in der Form

$$\int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p\,x^{n-1}\,dx$$

schreibt und nun $x^{m-n+1} = u$, $(a+bx^n)^p\,x^{n-1}\,dx = dv$, also

$$v = \frac{(a+b\,x^n)^{p+1}}{bn(p+1)}$$

setzt und $\int u\,dv$ durch teilweise Integration erledigt.

Formel (3) ergibt sich, indem man die Identität

$$x^{m+n} \equiv \frac{x^m(a+b\,x^n)}{b} - \frac{a\,x^m}{b}$$

mit $(a+bx^n)^{p-1}$ multipliziert und alsdann integriert. Man erhält zunächst

$$J(m+n, n, p-1) = \frac{1}{b}\,J(m, n, p) - \frac{a}{b}\,J(m, n, p-1).$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die rechte Seite von (1) und Auflösung der so entstehenden Gleichung nach $J(m, n, p)$ geht Gleichung (3) hervor.

Formel (4) folgt, wenn man die Formeln (1) und (3) voneinander abzieht, m durch $m-n$ ersetzt, p durch $p+1$ und alsdann nach $J(m, n, p)$ auflöst.

Formel (5) folgt aus (3), wenn man in (3) die Größe p durch $p+1$ ersetzt und dann nach $J(m, n, p)$ auflöst.

Formel (6) folgt, wenn man in (4) die Größe m durch $m+n$ ersetzt und dann nach $J(m, n, p)$ auflöst.

17. $$\int \frac{x^4}{+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^4\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Bei diesem binomischen Integral ist $m = 4$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = -1$. Man wird m mit Hilfe von Formel (4), Aufg. 16 um $n = 2$ verringern und erhält

$$J = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{3}{4}\int x^2\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

woraus durch Anwendung derselben Formel

$$J = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{3}{8}x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\arcsin x$$

hervorgeht.

In derselben Weise ist $\int\frac{x^m}{+\sqrt{1-x^2}}dx$ zu behandeln, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet. Ist aber m insbesondere eine ungerade positive Zahl, also $m=2n+1$, so setzt man $1-x^2=z^2$, $x\,dx=-z\,dz$ und findet

$$\int\frac{x^{2n+1}}{+\sqrt{1-x^2}}dx = -\int(1-z^2)^n dz,$$

worauf die Entwicklung nach dem binomischen Satze und gliedweise Integration zum Ziel führt. Ebenso bequem wäre, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist, die Substitution $x=\sin z$, die

$$\int\frac{x^m}{+\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{in} \quad \int\sin^m z\,dz$$

überführt (vgl. Aufg. 16, S. 108).

§ 10.

Die Integrale von der Form $\int R(x,y)\,dx$, wo $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$ ist.

1. Je nachdem a positiv oder negativ ist, gelten die Formeln

$$\int\frac{dx}{+\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{+\sqrt{a}}\ln\{ax+b+\sqrt{a(ax^2+2bx+c)}\},$$

$$\int\frac{dx}{+\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{ax+b}{+\sqrt{b^2-ac}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax+b}{+\sqrt{-a(ax^2+2bx+c)}}.$$

Dabei ist im Falle $a<0$ vorausgesetzt, daß $b^2-ac>0$ sei.

Der Wert des ersten Integrals kann auch in der Form

$$\frac{1}{+\sqrt{a}}\ln\frac{ax+b+\sqrt{a(ax^2+2bx+c)}}{ac-b^2}$$

geschrieben werden, denn diese Änderung bedeutet nur eine Hinzufügung von $-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(ac-b^2)$, die mit Rücksicht auf die willkürliche

Konstante gestattet ist. Wenn man dies beachtet, folgen im Falle $a > 0$ die Formeln

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{+\sqrt{a}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{ax+b}{+\sqrt{ac-b^2}}$$
$$= \frac{1}{+\sqrt{a}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{ax+b}{+\sqrt{a(ax^2+2bx+c)}},$$

die den Formeln des Falles $a < 0$ analog sind. Zu den Funktionen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ vgl. S. 143 f., S. 150 und S. 250 f.

2. Ist $g(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, etwa

$$g(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

so gilt die Formel

$$\int \frac{g(x)\,dx}{+\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$
$$= + (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-2} x + A_{n-1})\sqrt{ax^2+2bx+c}$$
$$+ A_n \int \frac{dx}{+\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

Die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ werden dadurch bestimmt, daß man diese Gleichung nach x differenziert und alsdann mit $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ multipliziert. Hierdurch ergibt sich links die Funktion $g(x)$, rechts eine ganze Funktion n^{ten} Grades; beide Funktionen müssen für alle Werte von x einander gleich sein, es müssen also in ihnen nach einem wichtigen Satze der Algebra die Koeffizienten gleicher Potenzen von x einander gleich sein. Man erhält die zur Bestimmung von $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ erforderlichen $n+1$ Gleichungen, wenn man die genannten Koeffizienten einander gleich setzt.

3. Die Bestimmung von $\int g(x)\sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx$, wo $g(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, läßt sich nach der in Regel **2** angegebenen Methode erledigen, wenn man das Integral in der Form

$$\int \frac{g(x)\cdot(ax^2+2bx+c)}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx$$

schreibt.

4. $\int \frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+2bx+c}}$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, wird durch die Substitution $x - k = 1 : z$ auf ein Integral von der in Regel **2** betrachteten Gestalt zurückgeführt.

5. $\int \frac{R(x)}{y}\,dx$, wo $R(x)$ eine rationale Funktion von x bedeutet und $y \equiv \sqrt{ax^2+2bx+c}$ ist, wird erledigt, indem man $R(x)$ in eine

ganze Funktion und eine Summe von Partialbrüchen verwandelt und dann nach Regel **2** und **4** gliedweise integriert.

6. Die Integrale

$$\int R(x, y)\, dx,$$

wo R eine rationale Funktion von x und von $y \equiv \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ bedeutet, lassen sich im Falle $a > 0$ durch die Substitution $y = z - x\sqrt{a}$, im Falle $a < 0$ durch die Substitution $y = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = az\,(x-\beta)$ in Integrale verwandeln, die sich über rationale Funktionen von z erstrecken; α und β sind hierbei die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung dieser Integrale ist folgende: $R(x, y)$ ist von der Form $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, wo $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ ganze Funktionen von x und y darstellen. Bei Einführung von $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ nimmt $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ die Gestalt an $\frac{P_1 + P_2 y}{Q_1 + Q_2 y}$, wobei nun P_1, P_2, Q_1, Q_2 ganze Funktionen von x allein sind, und dieser Quotient läßt sich durch

$$\frac{(P_1 + P_2 y)(Q_1 - Q_2 y)}{Q_1{}^2 - Q_2{}^2 y^2}$$

ersetzen, oder — wenn G und H ganze Funktionen von x bedeuten — durch

$$\frac{G + Hy}{Q_1{}^2 - Q_2{}^2 y^2} = \frac{G}{Q_1{}^2 - Q_2{}^2 y^2} + \frac{Hy^2}{(Q_1{}^2 - Q_2{}^2 y^2)\, y}.$$

Bei Einführung von $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ wird der erste dieser beiden Summanden eine rationale Funktion von x, deren Integration in § 8 gezeigt wurde, der zweite wird eine Funktion von der in Regel **5** erwähnten Gestalt.

7. Das Integral

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$$

geht durch die Substitution $ax + b = z^2$ über in

$$\int R\left(\frac{z^2 - b}{a}, z, \sqrt{\frac{cz^2 + ad - bc}{a}}\right) \frac{2z}{a}\, dz,$$

also in ein Integral von der in Regel **6** erwähnten Gestalt.

Beispiele.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + m});$$

vgl. Aufg. 48 und 49, S. 89 f.

2. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{m-x^2}} = \arc\sin \frac{x}{+\sqrt{m}};$$

vgl. Aufg. 13, S. 78.

3. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{7x^2+4x-12}} = \frac{1}{+\sqrt{7}} \ln \{7x+2+\sqrt{7(7x^2+4x-12)}\}.$$

4. $$\int \frac{dx}{+\sqrt{-3x^2+5x+8}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arc\sin \frac{-6x+5}{11} = \frac{1}{+\sqrt{3}} \arc\sin \frac{6x-5}{11}.$$

5. $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}},$$ insbesondere auch für $\alpha = \frac{1}{3}\pi$.

$$J = \left[\ln(x-\cos\alpha+\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1})\right]_{x=-1}^{x=+1} = \ln \frac{1-\cos\alpha+\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}-1-\cos\alpha}$$

$$= \ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{1-\cos\frac{1}{2}\alpha}\right) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{4}(\pi-\alpha)}{\sin^2\frac{1}{4}\alpha}\right).$$

Für $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ wird

$$J = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{\cos^2\frac{1}{6}\pi}{\sin^2\frac{1}{12}\pi}\right) = 2{,}30259 \log \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{6}\pi \cdot \cos^2\frac{1}{6}\pi}{\sin^2\frac{1}{12}\pi} = 1{,}8662.$$

6. Man beweise die Formel[1])

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}; \quad \alpha\beta \text{ sei } > 0.$$

Vergleicht man den Integranden mit

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

so ist $a = 4\alpha\beta$, $b = -(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)$, $c = (1+\alpha^2)(1+\beta^2)$, und diese Werte sind nun in

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\ln\{ax+b+\sqrt{a(ax^2+2bx+c)}\}\right]_{x=-1}^{x=+1}$$

einzutragen. Für $x=1$ nimmt der Ausdruck unter dem Logarithmus die Gestalt $-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1+\sqrt{\alpha\beta})^2$ an, für $x=-1$ die Gestalt $-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1-\sqrt{\alpha\beta})^2$ usw.

1) Vgl. Ch. Hermite, Cours d'analyse, 1. Teil, Paris 1873, S. 314 f.

7.
$$\int \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x^2 + 6x - 5}}\,dx.$$

Die Anwendung von Regel **2**, S. 181 ergibt

$$J = (A_0 x + A_1)\sqrt{3x^2 + 6x - 5} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x - 5}},$$

wo $A_0 = \frac{1}{6}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{5}{3}$ gefunden wird.

8.
$$\int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}}\,dx$$

$$J = (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)\sqrt{x^2 - 4x - 7} + A_3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}},$$

und zwar findet man $A_0 = 1$, $A_1 = 5$, $A_2 = 36$, $A_3 = 112$.

9.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\,dx.$$

$$J = \frac{ax - 3b}{2a^2}\sqrt{ax^2 + 2bx + c} + \frac{3b^2 - ac}{2a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}.$$

10. Wie groß ist der Flächeninhalt F der Zissoide

$$(x^2 + y^2)\,x - 2by^2 = 0$$

für das Intervall von x_1 bis x_2? Wie groß ist insbesondere der Inhalt des oberhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücks, das rechts durch die Asymptote $x = 2b$ begrenzt wird? (Vgl. Teil I, S. 62f.)

Hier ist

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2b - x}}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{\sqrt{-x^2 + 2bx}}\,dx;$$

in dem Ergebnis von Aufg. 9 hat man daher $a = -1$, $b = b$, $c = 0$ zu setzen. So ergibt sich

$$F = \Big[-\frac{x + 3b}{2}\sqrt{-x^2 + 2bx} + \frac{3b^2}{2}\arcsin\frac{x - b}{b}\Big]_{x = x_1}^{x = x_2}.$$

Bei Bestimmung des Inhalts der oberhalb der x-Achse gelegenen Zissoidenfläche ($x_1 = 0$, $x_2 = 2b$) ist Regel **2**, S. 61 zu beachten, denn für die obere Grenze $2b$ wird der Integrand unendlich groß. Man findet in diesem Fall

$$F = \lim_{\varepsilon = 0}\Big[-\frac{x + 3b}{2}\sqrt{-x^2 + 2bx} + \frac{3b^2}{2}\arcsin\frac{x - b}{b}\Big]_{x = 2b - \varepsilon} - \frac{3b^2}{2}\arcsin(-1)$$

$$= \lim_{\varepsilon = 0}\Big[-\frac{5b - \varepsilon}{2}\sqrt{2b\varepsilon - \varepsilon^2} + \frac{3b^2}{2}\arcsin\frac{b - \varepsilon}{b}\Big] - \frac{3b^2}{2}\arcsin(-1)$$

$$= \frac{3b^2}{2}\arcsin 1 - \frac{3b^2}{2}\arcsin(-1) = 3b^2 \arcsin 1 = \frac{3b^2\pi}{2}.$$

Der Inhalt der durch die *ganze* Kurve und ihre Asymptote $x = 2b$ begrenzten Fläche ist wegen der Symmetrie der Kurve zur x-Achse doppelt so groß und wird daher $3b^2\pi$, also dreimal so groß wie der Inhalt des Kreises, der gewöhnlich zur Konstruktion der Zissoide benutzt wird.

11. $$\int + \sqrt{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\, dx = \int \frac{\alpha x + \beta}{+\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}}\, dx,$$

wobei die Fälle $\alpha\gamma > 0$ und $\alpha\gamma < 0$ zu unterscheiden sind; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sollen natürlich *reelle* Zahlen sein.

$$J = + A_0 \sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)} + A_1 \int \frac{dx}{+\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}},$$

und zwar findet man

$$A_0 = \frac{1}{\gamma}, \quad A_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2\gamma},$$

daher wird

im Falle $\alpha\gamma > 0$ $\quad J = \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}$

$$- \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \ln\left\{\frac{2\alpha\gamma x + \alpha\delta + \beta\gamma}{2} + \sqrt{\alpha\gamma(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}\right\},$$

im Falle $\alpha\gamma < 0$ $\quad J = \frac{1}{\gamma}\sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)}$

$$+ \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2\gamma\sqrt{-\alpha\gamma}} \arcsin \frac{2\alpha\gamma x + \alpha\delta + \beta\gamma}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}.$$

Hier bildet der absolute Wert von $\alpha\delta - \beta\gamma$ den Nenner des Arguments der Funktion arc sin. Der Ausdruck $+\sqrt{b^2 - ac}$ der bei vorliegendem Integral benutzten Formel in Regel **1**, S. 180 wird nämlich jetzt $\sqrt{\frac{1}{4}(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - \alpha\beta\gamma\delta}$, und dies ist $\pm\frac{1}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)$. Das zweite Integral in Regel **1**, S. 180 hat aber nur dann einen reellen Wert, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, d. h. solange die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$, also jetzt die Größen $-\beta : \alpha$ und $-\delta : \gamma$ reell sind, und umgekehrt. In vorliegendem Integral sind diese Wurzeln reell, die Diskriminante $b^2 - ac$ also positiv, der Ausdruck $+\sqrt{b^2 - ac}$ wird gleich $+\frac{1}{2}\sqrt{|\alpha\delta - \beta\gamma|^2}$.

12. Unter den Voraussetzungen von Aufg. 13, S. 51 soll die Zeitdauer t_1 bestimmt werden, die der materielle Punkt braucht um von seiner Anfangslage aus die Strecke s_1 zu durchlaufen.

Hat der Punkt die Strecke s durchlaufen, so ist seine Geschwindigkeit nach Gleichung (5), S. 52:

$$v = \frac{ds}{dt} = + \sqrt{v_0{}^2 + \frac{2gR^2 s}{a(a - s)}};$$

hieraus folgt

$$(1)\qquad t_1 = +\int_0^{s_1} \sqrt{\frac{a(a-s)}{s(2gR^2 - av_0^2) + a^2 v_0^2}}\, ds,$$

ein Ausdruck von der Form

$$\int_0^{s_1} \sqrt{\frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}}\, ds,$$

der in Aufg. 11 bestimmt wurde. Insbesondere im Falle $v_0 = 0$ wird

$$(2)\qquad t_1 = +\frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^{s_1} \sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds,$$

und dieser Ausdruck geht durch die Substitution $s = z^2$ in

$$t_1 = +\frac{2}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^{+\sqrt{s_1}} \sqrt{a - z^2}\, dz = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left\{ \frac{z}{2}\sqrt{a - z^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{z}{\sqrt{a}} \right\}_{z=0}^{z=+\sqrt{s_1}}$$

über. Daher folgt

$$(3)\qquad t_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left\{ \sqrt{s_1(a - s_1)} + a \arcsin \sqrt{\frac{s_1}{a}} \right\}.$$

Hätte man bei

$$\int_0^{s_1} \sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds = \int_0^{s_1} \frac{a-s}{\sqrt{(a-s)s}}\, ds$$

das Ergebnis von Aufg. 11 benutzt, so wäre

$$(4)\qquad t_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\sqrt{s(a-s)} - \frac{a}{2} \arcsin \frac{-2s + a}{a} \right]_0^{s_1}$$

$$= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \left\{ \sqrt{s_1(a - s_1)} - \frac{a}{2} \arcsin \frac{a - 2s_1}{a} + \frac{a}{2}\,\frac{\pi}{2} \right\}$$

hervorgegangen, ein Ausdruck, der von dem zuvor erhaltenen nur *scheinbar* verschieden sein kann. In der Tat läßt sich

$$\arcsin \sqrt{\frac{s_1}{a}} \quad \text{in} \quad -\frac{1}{2} \arcsin \frac{a - 2s_1}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

überführen. Setzt man nämlich

$$\arcsin \sqrt{\frac{s_1}{a}} = \frac{1}{2} u,$$

also

$$\sqrt{\frac{s_1}{a}} = \sin \frac{1}{2} u$$

und

$$\frac{s_1}{a} = \sin^2 \frac{1}{2} u,$$

so wird

$$1 - \frac{2 s_1}{a} = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} u = \cos u = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - u\right),$$

daher

$$\frac{1}{2}\pi - u = \arcsin\left(1 - \frac{2 s_1}{a}\right)$$

oder

$$u = \frac{1}{2}\pi - \arcsin \frac{a - 2 s_1}{a},$$

folglich

$$\frac{1}{2} u = \arcsin \sqrt{\frac{s_1}{a}} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{a - 2 s_1}{a}.$$

Um zur Erdoberfläche zu gelangen ($s_1 = a - R$) würde der Punkt die Zeit

$$(5) \qquad T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\sqrt{R(a-R)} + a \arcsin \sqrt{\frac{a-R}{a}}\right\}$$

brauchen.

Eine andere Form der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich, wenn man in (2) die Hilfsveränderliche φ durch $a - s = a \sin^2 \varphi$ einführt. Alsdann wird

$$s = a \cos^2 \varphi, \quad ds = -2 a \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

und

$$(6) \qquad t_1 = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1} 2 a \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{a\sqrt{a}}{2R\sqrt{2g}} \{\sin 2\varphi_1 + \pi - 2\varphi_1\},$$

wobei $\sin^2 \varphi_1 = (a - s_1) : a$ ist; insbesondere für $s_1 = a - R$, $a - s_1 = R$ wird $\sin^2 \varphi_1 = \frac{R}{a}$ und mit dem hieraus bestimmten Wert von φ_1 geht t_1 in T über.

Die Geschwindigkeit V, mit der der Punkt, wieder im Falle $v_0 = 0$, die Erdoberfläche erreicht, war (vgl. Formel (6), S. 52):

$$(7) \qquad V = +\sqrt{\frac{2 g R (a - R)}{a}};$$

diese wird nun $V = +\sqrt{2gR} \cos \varphi_1$, wo $\sin^2 \varphi_1 = R : a$ ist.

Wenn ein Körper, dessen Abstand von der *Erde* so groß ist wie der mittlere Abstand des *Mondes* von der Erde, aus der Ruhelage gegen die ruhend gedachte Erde fallen würde, so würde bis zur Ankunft dieses Körpers an der Erdoberfläche eine Zeit verfließen, die nach Gleichung (6) gleich 4 Tagen $20^3/_4$ Stunden gefunden wird. Dabei ist für den Radius der Erde der Betrag $R = 6370300$ m (vgl. Fußnote 1 zu S. 52)

angenommen, für den mittleren Abstand des Mondes von der Erde der Betrag 385080000 m; ferner ist $g = 9{,}81$ m/sek². Für die Endgeschwindigkeit, mit der der Körper die Erdoberfläche erreicht, würde man $V_1 = 11{,}087$ km/sek finden.

Würde ein Körper, dessen Abstand von der *Sonne* so groß ist wie der mittlere Abstand der *Erde* von der Sonne (etwa $a = 149 \cdot 10^9$ m), aus der Ruhelage gegen die ruhend gedachte Sonne fallen, so würde bis zur Ankunft an der Oberfläche der Sonne eine Zeit von etwa $64\frac{1}{2}$ Tagen verstreichen; die Endgeschwindigkeit würde etwa 611 km/sek betragen. Dabei ist in den Formeln (6) und (7) für R der Radius der Sonne ($69605 \cdot 10^4$ m), für g die durch die Masse der Sonne hervorgerufene Beschleunigung g_1 (etwa 270 m/sek²) einzusetzen. Die Zahl 270 findet man bei Berücksichtigung der Tatsache, daß die Beschleunigung g_1 an der Oberfläche der Sonne der Masse S der Sonne proportional, dem Quadrat des Radius R_1 der Sonne umgekehrt proportional ist. Bedeutet k eine Proportionalitätskonstante, so ist daher $g_1 = kS : R_1^2$. Analog besteht für die Beschleunigung g an der Oberfläche der Erde die Gleichung $g = kE : R^2$, wo E die Masse, R den Radius der Erdkugel bezeichnet. Aus den beiden Gleichungen folgt $g_1 = \frac{SR^2}{ER_1^2} g$, wobei $S : E$ etwa gleich 325000 ist.

13. Unter welcher Bedingung ist

$$\int \frac{a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\,dx$$

rein algebraisch, d. h. welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a, b, c$ stattfinden, wenn das nach Regel **2**, S. 181 in dem Wert des Integrals auftretende Glied

$$A_3 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

fehlen soll, also $A_3 = 0$ sein soll?[1]

Bei der Integration nach Regel **2**, S. 181 gelangt man zu der Gleichung

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (ax^2 + 2bx + c)(2A_0x + A_1)$$
$$+ (A_0x^2 + A_1x + A_2)(ax + b) + A_3,$$

aus der durch die Koeffizientenvergleichung für A_0, A_1, A_2, A_3 die Bestimmungsgleichungen

$$a_0 = 3A_0a, \quad a_1 = 5A_0b + 2A_1a,$$
$$a_2 = 2A_0c + 3A_1b + A_2a, \quad a_3 = A_1c + A_2b + A_3$$

1) Die mit den Elementen der Determinantentheorie nicht vertrauten Leser mögen Aufg. 13 und 14 überschlagen.

hervorgehen. Bei Auflösung dieser Gleichungen mit Hilfe der Determinanten ist bekanntlich jede der Unbekannten A_0, A_1, A_2, A_3 gleich dem Quotienten zweier Determinanten, wobei die Determinante Δ des diesen Quotienten gemeinsamen Nenners aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildet wird und im vorliegenden Beispiel gleich

$$\begin{vmatrix} 3a & 0 & 0 & 0 \\ 5b & 2a & 0 & 0 \\ 2c & 3b & a & 0 \\ 0 & c & b & 1 \end{vmatrix} = 6a^3$$

wird, während die den Zähler bildende Determinante aus Δ dadurch hervorgeht, daß man in ihr die aus den Koeffizienten der betreffenden Unbekannten gebildete Vertikalreihe durch die Reihe a_0, a_1, a_2, a_3 ersetzt. Man findet hiernach

$$6a^3 A_3 = \begin{vmatrix} 3a & 0 & 0 & a_0 \\ 5b & 2a & 0 & a_1 \\ 2c & 3b & a & a_2 \\ 0 & c & b & a_3 \end{vmatrix},$$

und das Verschwinden dieser Determinante ist die gesuchte Bedingung.

14. Die gleiche Aufgabe für die Integrale

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{x^5}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx.$$

Man findet

$$\begin{vmatrix} 7b & 3a & 0 & 0 \\ 3c & 5b & 2a & 0 \\ 0 & 2c & 3b & a \\ 0 & 0 & c & b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} 9b & 4a & 0 & 0 & 0 \\ 4c & 7b & 3a & 0 & 0 \\ 0 & 3c & 5b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 3b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten haben von Null verschiedene Elemente *nur* in der *Hauptdiagonale und den beiden zu ihr oberhalb bzw. unterhalb parallel laufenden Reihen.* Allgemein wird die *Hauptdiagonale* der Determinante m^{ten} Grades Δ_m, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung für einen *rein algebraischen* Wert von

$$(1) \qquad J_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx$$

darstellt (m eine *ganze positive* Zahl), durch die Elemente

$$(2m-1)\,b,\ (2m-3)\,b,\ \dots\ 5b,\ 3b,\ b$$

gebildet, die nächste obere parallele Reihe besteht aus den Elementen

$$(m-1)\,a,\ (m-2)\,a,\ \ldots\ 2a,\ a,$$

die nächste untere aus

$$(m-1)\,c,\ (m-2)\,c,\ \ldots\ 2c,\ c.$$

Alle übrigen Elemente sind Null.

Übrigens läßt sich diese Determinante Δ_m auch so schreiben, daß man ohne Änderung der Hauptdiagonale alle Elemente der eben erwähnten einen zur Hauptdiagonale parallelen Reihe gleich 1 setzt, während die Elemente der anderen Reihe durch die Produkte

$$(m-1)^2\,ac,\ (m-2)^2\,ac,\ \ldots\ 4ac,\ ac$$

gebildet werden. Die vorhin geschriebene Determinante Δ_5 kann daher auch in der Form

$$\begin{vmatrix} 9b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16ac & 7b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9ac & 5b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4ac & 3b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ac & b \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, sie ist offenbar in bezug auf a und c symmetrisch.

Determinanten dieser Art heißen *Kettenbruchdeterminanten* oder *Kontinuanten*, weil sie bei Bestimmung der Näherungswerte von Kettenbrüchen (kontinuierlichen Brüchen) Verwendung finden.[1])

Ist m eine ungerade Zahl, so hat Δ_m, wie sich leicht zeigen läßt, den Koeffizienten b als Faktor; für $b = 0$ wird daher das Integral J_m in Übereinstimmung mit den Bemerkungen zu Aufg. 17, S. 179f. rein algebraisch.

Durch Berechnung von Δ_m mit Hilfe der Unterdeterminanten der ersten Vertikal- oder Horizontalreihe gelangt man sehr leicht zu der Beziehung

$$(2)\qquad \Delta_m = (2m-1)\,b\Delta_{m-1} - (m-1)^2\,ac\Delta_{m-2},$$

die zwischen Δ_m, Δ_{m-1} und Δ_{m-2} stattfindet.

---

1) Näheres über Kontinuanten findet man z. B. bei S. Günther, Lehrbuch der Determinanten-Theorie, 2. Aufl., Erlangen 1877, S. 123—144, bei E. Pascal, Die Determinanten, deutsche Ausgabe, bearbeitet von H. Leitzmann, Leipzig 1900, S. 151—157 oder bei Borino Borini, I continuanti, Forlì 1900. Vgl. ferner die Artikel von A. Loewy in Pascals Repertorium der höheren Mathematik, 2. Aufl., I. Bd. Analysis, herausgegeb. von P. Epstein, Leipzig und Berlin 1910, S. 69f. und die Artikel von E. Netto und von A. Pringsheim in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I. Bd., 1. Teil, Leipzig 1898 bis 1904, S. 44 und 123. An allen diesen Stellen findet man auch nähere Literaturangaben.

Beachtet man ferner, daß $\Delta_2 = 3b^2 - ac$, $\Delta_3 = 3b(5b^2 - 3ac)$ ist, so folgt aus der Beziehung (2) leicht, daß Δ_m im Falle eines geraden m die Potenzen von b nur mit geradem Exponenten enthält, also bei Vertauschung von b mit $-b$ unverändert bleibt; im Falle eines ungeraden m treten in Δ_m die Potenzen von b nur mit ungeradem Exponenten auf, Δ_m hat, wie schon erwähnt, b als Faktor.

Hieraus und aus der Symmetrie von Δ_m in bezug auf a und c geht hervor, daß *wenn das durch* (1) *definierte Integral* J_m *rein algebraisch ist, auch die Integrale*

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{cx^2+2bx+a}}\,dx, \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2-2bx+c}}\,dx \quad \textit{und} \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{cx^2-2bx+a}}\,dx$$

rein algebraisch sind, und gleiches würde von allen Integralen gelten, die aus den soeben angeschriebenen durch solche Änderungen der Werte a, b, c *hervorgehen, die den Quotienten* $b^2 : ac$ *konstant erhalten.*[1])

15. Man zeige, daß

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{5x^2-6x+3}}\,dx$$

rein algebraisch ist.

Der Ausdruck $\Delta_3 = 3b(5b^2 - 3ac)$ verschwindet im vorliegenden Beispiel; man findet

$$J = \frac{1}{30}(2x^2 + 3x + 3)\sqrt{5x^2 - 6x + 3}.$$

16. Die gleiche Aufgabe für

$$\int \frac{11x^4 - 195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx.$$

Man findet $J = \frac{1}{4}(11x^3 - 77x^2 + 105x - 175)\sqrt{x^2+6x+5}$.

17. $$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,dx.$$

Nach dem in Regel **3**, S. 181 angegebenen Verfahren ist

$$J = \int \frac{ax^2+2bx+c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + \frac{ac-b^2}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

---

1) Wenn das Integral J_m rein algebraisch sein soll, muß also entweder m eine ungerade Zahl und $b = 0$ sein, oder es muß bei beliebigem ganzem und positivem Werte von m der Quotient $b^2 : ac$ Wurzel einer gewissen Gleichung sein, und zwar ist diese Gleichung vom Grade n, wenn $m = 2n$ oder $m = 2n+1$ ist. Sie hat immer n reelle voneinander verschiedene positive echte Brüche zu Wurzeln und steht in engster Beziehung zu dem Ausdruck für die *Kugelfunktion* erster Art und m^{ter} Ordnung. Ich erwähne dies jetzt ohne Beweis und gedenke an anderer Stelle näher hierauf einzugehen.

Insbesondere wird

$$\int \sqrt{m + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + m} + \frac{m}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + m}\right)$$

und

$$\int \sqrt{m - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{m - x^2} + \frac{m}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{m}}\cdot$$

18. $$\int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\cdot$$

Nach Regel **4**, S. 181 folgt mit Hilfe der Substitution $x - k = 1 : z$

$J = -\int \frac{dz}{\sqrt{G(z)}}$, wo $G(z) = (ak^2 + 2bk + c)z^2 + 2(ak + b)z + a$ ist.

19. $$\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2 - 8x + 5}}\cdot$$

Mit Hilfe der Substitution $x - 2 = 1 : z$ erhält man

$$J = -\int \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + 4z + 3}}\,dz = \left(3 - \frac{1}{2}z\right)\sqrt{z^2 + 4z + 3}$$

$$- \frac{9}{2}\ln\left(z + 2 + \sqrt{z^2 + 4z + 3}\right) = \frac{6x - 13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2 - 8x + 5}$$

$$- \frac{9}{2}\ln\frac{2x - 3 + \sqrt{3x^2 - 8x + 5}}{x - 2}\,.$$

20. $$\int \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 5x + 3}}\cdot$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung von $1 : (x^2 - 4)$ folgt

$$J = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - 5x + 3}} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 - 5x + 3}},$$

und wenn man nun auf jedes dieser beiden Integrale dasselbe Verfahren wie in Aufg. 18 anwendet, ergibt sich

$$J = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\arcsin\frac{x + 4}{(x-2)\sqrt{13}}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{17}}\ln\left\{\frac{16 - 9x}{2(x+2)} + \frac{1}{x+2}\sqrt{17(x^2 - 5x + 3)}\right\}.$$

§ 11.

Integration durch Entwicklung in eine unendliche Reihe.

1. Es sei eine unendliche Reihe von reellen Funktionen der Veränderlichen x

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$$

gegeben, und ihre Glieder seien innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches eindeutig, endlich und stetig. Ist diese Reihe in dem dem Variabilitätsbereich angehörenden Intervall $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig* konvergent[1]) und ist $f(x)$ ihre Summe, so gilt die Formel

$$(2) \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \cdots + \int_a^b u_{n-1}\,dx + \int_a^b u_n\,dx + \cdots.$$

Im Falle eines unbestimmten Integrals kann man sagen: die *gliedweise Integration* der die Funktion $f(x)$ darstellenden Reihe ergibt die Funktion $F(x)$, die $f(x)$ zur Ableitung hat, falls die Reihe (1) *gleichmäßig konvergiert.*

2. Ist die Reihe (1) eine unendliche konvergente *Potenzreihe*

$$(3) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

so ist die gliedweise Integration innerhalb des Konvergenzbereiches stets gestattet.[2])

3. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) in dem Intervall $a + \delta \leqq x \leqq b - \varepsilon$, wo δ und ε beliebig kleine positive Größen sind, ist zwar eine *hinreichende*, aber nicht die *notwendige* Bedingung für die Gültigkeit der Formel (2). Die notwendige Bedingung ist vielmehr

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b r_n(x)\,dx = 0,$$

---

1) Obgleich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz schon in Teil I, S. 75 definiert wurde, soll die Definition mit Rücksicht auf ihre Wichtigkeit hier wiederholt werden: Es sei $s_n(x)$ die Summe der $n+1$ ersten Glieder der die Funktion $f(x)$ darstellenden Reihe (1) und $r_n(x)$ sei der vom Glied u_{n+1} an genommene Rest der Reihe, also $r_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ und $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$. Die Reihe (1) heißt alsdann *gleichmäßig konvergent* in einem gewissen Intervall, falls sich zu einer vorgegebenen beliebig klein gewählten positiven Größe ε eine Zahl m bestimmen läßt, so daß für *jeden* dem genannten Intervall angehörigen Wert x und für *jedes* $N \geqq m$ die Ungleichung $|r_N(x)| < \varepsilon$ gilt; es muß also für jedes $N \geqq m$ der absolute Wert $|u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots| < \varepsilon$ sein.

2) Dies beruht darauf, daß jede Potenzreihe, die für einen gewissen Wert x konvergent ist, in dem ganzen Intervall von 0 bis x *gleichmäßig* konvergiert.

wobei $r_n(x)$ einen Ausdruck für den Rest $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ der vorgelegten Reihe bedeutet. Entsprechendes gilt für die Potenzreihe (3).

4. Ist die Funktion $f(x)$ durch eine Reihe von der Form

$$(4) \qquad \begin{aligned} f(x) = {} & a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots \\ & + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots \end{aligned}$$

dargestellt, die also nach den Sinus und Kosinus der ganzzahligen Vielfachen der Veränderlichen x angeordnet ist, so sagt man $f(x)$ ist in eine *trigonometrische* oder *Fouriersche Reihe* entwickelt.

5. Wenn eine Funktion $f(x)$ die sogenannten *Dirichletschen Bedingungen* erfüllt, d. h. wenn $f(x)$ in einem gewissen Variabilitätsbereich eindeutig und endlich ist, daselbst nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen (Sprüngen) von endlicher Größe aufweist und in dem genannten Bereich nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima hat, so gestattet die Funktion $f(x)$ die Entwicklung in eine Fouriersche Reihe, und zwar gelten in dieser Hinsicht die Sätze:

5a. Erfüllt $f(x)$ die Dirichletschen Bedingungen in dem Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$, so lassen sich die Koeffizienten der Reihe (4) durch bestimmte Integrale darstellen, es ist nämlich

$$(5) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx;$$

an einer Unstetigkeitsstelle ist der Summenwert der Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus $f(x+0)$ und $f(x-0)$.[1]

5b. Irgend eine den Dirichletschen Bedingungen genügende, für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ definierte Funktion läßt sich durch die Reihen

$$(6) \qquad f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

und

$$(7) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

darstellen, wobei

$$(8) \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

ist; die Reihe (6) ergibt für $x = 0$ und $x = \pi$ den Funktionswert allerdings nur dann, wenn dieser gleich Null ist.[2]

---

1) Die Bedeutung der Ausdrücke $f(x+0)$ und $f(x-0)$ ist in Teil I, S. 192 erläutert.

2) Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n der Reihen (4), (6) und (7) in dem Falle, wo die Funktion $f(x)$ nur empirisch gegeben ist, also z. B. nur für eine diskrete Anzahl von Werten x die zugehörigen y bekannt sind oder wenn die Kurve $y = f(x)$ gezeichnet vorliegt, vgl. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen (Sammlung Schubert Nr. 32), Leipzig 1904, S. 147—168.

5c. Genügt die Funktion $f(x)$ den Dirichletschen Bedingungen, so ist die zugehörige Fouriersche Reihe in jedem Intervalle, das keine Unstetigkeitsstelle enthält, *gleichmäßig konvergent.*

Beispiele.

1. Die Funktion $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ ist durch Integration der Reihe für $f'(x) = 1 : (1 + x^2)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln, dabei sei der Bogen $\operatorname{arc\,tg} x$ in dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int (1 - x^2 + x^4 - \cdots)\, dx = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots + C;$$

hier ist $C = 0$, da für $x = 0$ auch $\operatorname{arc\,tg} x = 0$ sein soll.

Die Reihe ist jedenfalls für $|x| < 1$ gültig; aber sie gilt auch noch für $x = \pm 1$, wie schon in Teil I, S. 93f. gezeigt wurde. Der Bogen liegt daher in dem Intervall von $-\frac{1}{4}\pi$ bis $+\frac{1}{4}\pi$. Die Verwendung der Reihe zur Berechnung der Zahl π wurde schon in Teil I a. a. O. erwähnt.

2. Die Funktion $f(x) = \arcsin x$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln durch Integration von $f'(x) = 1 : \sqrt{1 - x^2}$; dabei sei der Bogen in dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen.

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{+\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= \int \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{2n} + \cdots\right) dx + C$$
$$= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

Hier ist $C = 0$, da für $x = 0$ auch $\arcsin x = 0$ sein soll. Die Reihe ist jedenfalls für $|x| < 1$ gültig (vgl. Teil I, S. 95), aber sie gilt auch für $x = \pm 1$, wie gleichfalls schon in Teil I, S. 95 bemerkt wurde.

3. $$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt.$$

Mit Benutzung der Reihe für $\ln(1 + t)$ folgt (vgl. Teil I, S. 80)

$$J = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t^2 - \cdots\right) dt = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n^2} + \cdots.$$

Der Integrand konvergiert, so lange $-1 < t \leqq +1$ ist; für dieses Intervall gilt daher auch die durch Integration gefundene Reihe, sie gilt aber auch noch für $x = -1$ (vgl. Teil I, S. 85, Aufg. 26).

4. $$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt.$$

$$J = \int_0^1 (1 + t + t^2 + \cdots) \ln t\,dt. \quad \text{Nun ist} \int_0^1 t^n \cdot \ln t\,dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

(vgl. Aufg. 10, S. 66), somit $J = -\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right\}$.

Später (S. 200) wird gezeigt werden, daß die in der Klammer stehende Reihe die Summe $\frac{1}{6}\pi^2$ hat, daher wird $J = -\frac{1}{6}\pi^2$.

Ebenso findet man

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt = -\left\{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right\} = -\left\{\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi^2\right\} = -\frac{1}{12}\pi^2.$$

5. Nach Aufg. 48, S. 90 ist

$$\int \frac{dt}{+\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel soll $\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$ in eine unendliche Reihe entwickelt werden.

Für $t^2 \leqq 1$ gilt nach Teil I, S. 91 die Formel

$$\frac{1}{+\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \cdots,$$

aus der durch gliedweise Integration

$$\int_0^x \frac{dt}{+\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$

für $-1 \leqq x \leqq +1$ hervorgeht.

6. $\int_0^1 x^{nx}\,dx$ zu berechnen unter Benutzung der Reihe für $x^{nx} = e^{nx\ln x}$. Hierbei sei n eine ganze positive Zahl.

$$J = \int_0^1 \left\{1 + nx\ln x + \frac{n^2x^2(\ln x)^2}{2!} + \frac{n^3x^3(\ln x)^3}{3!} + \cdots\right\} dx.$$

Bei der Integration dieser Reihe beachte man, daß die auf das erste Glied folgenden Glieder des Integranden für die untere Grenze 0 des

Integrals nicht unendlich groß werden, denn $\lim_{x=0}(x \ln x)$ ist Null. Ferner ist, wenn p eine beliebige positive Zahl bezeichnet:

$$\int x^n (\ln x)^p \, dx = \frac{x^{n+1}(\ln x)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1}\int x^n (\ln x)^{p-1}\, dx;$$

daher wird

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx = (-1)^2 \cdot \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-2} dx$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

So findet man

$$\int_0^1 x^{nx}\, dx = 1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \cdots.$$

7. Die Funktion $y = \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)$, wo zunächst $\alpha^2 < 1$ sei, in eine nach Potenzen von α ansteigende unendliche Reihe zu entwickeln, indem man zunächst mit Hilfe der Methode der Koeffizientenvergleichung die Gültigkeit der Reihe

$$(1) \quad \frac{1}{2}\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\alpha - \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = -\{\cos x + \alpha \cos 2x + \alpha^2 \cos 3x + \cdots\}$$

beweist und alsdann gliedweise integriert.

Zur Ableitung der Reihe für $\frac{1}{2}\frac{dy}{d\alpha}$ geht man aus von

$$\alpha - \cos x = (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \cdots\}$$

und setzt zur Bestimmung von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in dieser Gleichung die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots$ einander gleich. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} -\cos x &= a_0, \\ 1 &= a_1 - 2a_0 \cos x, \\ 0 &= a_2 - 2a_1 \cos x + a_0, \\ 0 &= a_3 - 2a_2 \cos x + a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

woraus

$$a_0 = -\cos x, \qquad a_1 = 1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x,$$

$$a_2 = -(2\cos 2x \cos x - \cos x) = -\cos 3x,$$

$$a_3 = -(2\cos 3x \cos x - \cos 2x) = -\cos 4x, \;\ldots,\; a_n = -\cos(n+1)x$$

hervorgeht. Hierbei ist die Gleichung

$$\cos mx = 2\cos(m-1)x\cos x - \cos(m-2)x$$

benutzt, die man sofort durch Addition der beiden Formeln

$$\cos mx = \cos(m-1)x\cos x - \sin(m-1)x\sin x,$$
$$\cos(m-2)x = \cos(m-1)x\cos x + \sin(m-1)x\sin x$$

erhält. So ergibt sich schließlich die Reihe (1), die in dem Intervall $-1+\delta \leqq \alpha \leqq 1-\varepsilon$, wo δ und ε beliebig kleine positive Größen bedeuten, gleichmäßig konvergiert, denn sie ist eine konvergente Potenzreihe, so lange α einen echten Bruch bedeutet (vgl. Regel **2**, S. 193). Die gliedweise Integration ist daher gestattet. Man erhält

$$\begin{aligned}(2)\qquad \tfrac{1}{2}y &= \tfrac{1}{2}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) = \ln\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\\ &= -\int(\cos x+\alpha\cos 2x+\alpha^2\cos 3x+\cdots)\,d\alpha\\ &= -\{\alpha\cos x+\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2x+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3x+\cdots\}\cdot\end{aligned}$$

Die eigentlich hinzuzufügende Integrationskonstante ist Null, denn für $\alpha=0$ ist auch $y=0$.

Im Falle $\alpha>1$ setzt man

$$\ln\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \ln\alpha+\ln\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}\cos x+1}$$

und darf nun die soeben erhaltene Reihenentwicklung benutzen, wenn man in ihr α durch $1:\alpha$ ersetzt.

Für $\alpha=1$ folgt

$$\ln\{2(1-\cos x)\} = \ln(4\sin^2\tfrac{1}{2}x) = -2\{\cos x+\tfrac{1}{2}\cos 2x+\tfrac{1}{3}\cos 3x+\cdots\}$$

oder auch

$$(3)\qquad \ln\sin\tfrac{1}{2}x = -\ln 2-\{\cos x+\tfrac{1}{2}\cos 2x+\tfrac{1}{3}\cos 3x+\cdots\};$$

für $\alpha=-1$ folgt

$$\ln\{2(1+\cos x)\} = \ln(4\cos^2\tfrac{1}{2}x) = 2\{\cos x-\tfrac{1}{2}\cos 2x+\tfrac{1}{3}\cos 3x-\cdots\}$$

oder

$$(4)\qquad \ln\cos\tfrac{1}{2}x = -\ln 2+\cos x-\tfrac{1}{2}\cos 2x+\tfrac{1}{3}\cos 3x-\cdots$$

Die erste der beiden Reihen (3) und (4) konvergiert für alle Werte von x mit Ausnahme von $x=2k\pi$, wo k eine ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet[1]); die zweite Reihe konvergiert für alle Werte von x ausgenommen $x=(2k+1)\pi$.

1) Man kann zeigen, daß eine Fouriersche Reihe konvergent ist, wenn ihre Koeffizienten unbegrenzt abnehmende Größen von gleichem oder abwechselndem

Ersetzt man in (3) und (4) x durch $2x$, so folgt

$$(5)\qquad \ln \sin x = -\ln 2 - \{\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x + \cdots\},$$

$$(6)\qquad \ln \cos x = -\ln 2 + \cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x - \cdots,$$

Ausdrücke, die für alle Werte von x mit Ausnahme von $x = k\pi$ bzw. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ konvergieren. Nach steigenden Potenzen von x angeordnete Reihen für diese beiden Funktionen findet man in Teil I, S. 83.

Insbesondere folgt $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln \sin x\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln \cos x\, dx = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$

8. Die aus Aufg. 7 folgende Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\alpha + \cos x}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \cos x - \alpha\cos 2x + \alpha^2 \cos 3x - \cdots \qquad (0 < \alpha \leqq 1)$$

ist nach x zu integrieren und hierbei das Ergebnis von Aufg. 21, S. 116 zu benutzen. Man findet

$$(8)\qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha \sin x}{1 + \alpha\cos x} = \alpha\left\{\sin x - \frac{\alpha}{2}\sin 2x + \frac{\alpha^2}{3}\sin 3x - \cdots\right\},$$

wobei die Intgegrationskonstante Null ist, wenn der Bogen arc tg dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ angehört. Die Integration der Reihe (7) ist gestattet, da die zugehörige Funktion die Dirichletschen Bedingungen erfüllt (Regel **5**).

Für $\alpha = 1$ folgt

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots,$$

eine für das Intervall $-\pi < x < \pi$ gültige Gleichung, und wenn man in ihr x durch $\pi - x$ ersetzt, ergibt sich

$$(10)\qquad \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}x = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots,$$

eine im Intervall $0 < x < 2\pi$ gültige Entwicklung.

9. Welche Reihe erhält man, wenn Gleichung (10) nochmals integriert wird?

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\pi x = \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + C.$$

Vorzeichen sind. Die Konvergenz der nur die Kosinus enthaltenden Reihe bedarf allerdings bei gleichem Vorzeichen der Koeffizienten für die Werte $x = \pm 2k\pi$ besonderer Prüfung, bei abwechselndem Vorzeichen für die Werte $x = \pm(2k+1)\pi$.

Zur Bestimmung der Integrationskonstante wendet man dies Ergebnis an auf $x=0$, was nach Regel **3**, S. 193 gestattet ist und findet so

$$(11)\quad \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\pi x=\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

Die in der Klammer stehende (nach Teil I, S. 85f. konvergente) Reihe hat hierbei, wie sofort gezeigt wird, die Summe $\frac{1}{6}\pi^2$.

Zunächst ergibt nämlich die Substitution $x=\pi$ in (11) die Reihe

$$(12)\qquad \frac{1}{8}\pi^2=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$$

Die Reihe

$$\mathfrak{R}_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

läßt sich nun auch in der Gestalt

$$\mathfrak{R}_2=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

schreiben; daher ist $\mathfrak{R}_2=\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{4}\mathfrak{R}_2$, woraus

$$(13)\qquad \mathfrak{R}_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{6}\pi^2$$

hervorgeht.

10. Wird der Bruch $\frac{\alpha-\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$ mit 2α multipliziert und dann von 1 subtrahiert, so erhält man

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2};$$

mit Rücksicht auf (1) in Aufg. 7 folgt daher

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha^2}\{1+2\alpha\cos x+2\alpha^2\cos 2x+2\alpha^3\cos 3x+\cdots\},\quad \alpha^2<1.$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\cos mx$, wo m eine ganze positive Zahl ist, soll nun mit Benutzung des Ergebnisses von Aufg. 67, S. 96 die Formel abgeleitet werden

$$(14)\qquad \int_0^\pi \frac{\cos mx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx=\frac{\alpha^m\pi}{1-\alpha^2},\qquad \alpha^2<1.$$

Bei gliedweiser Integration der in der angegebenen Weise erhaltenen Reihe erhält man bei jedem Glied Null, ausgenommen bei dem Glied $2\alpha^m\cos mx\cdot\cos mx$, dessen Integration $2\alpha^m\cdot\frac{1}{2}\pi$ ergibt.

Im Falle $\alpha > 1$ ist der in Aufg. 7 angegebene Weg einzuschlagen.

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Im Falle $x^2 \leqq 1$ wird

$$J = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + \cdots\right) dx$$
$$= x - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{13}}{13} + \cdots + C.$$

Im Falle $x^2 > 1$ setzt man $x = 1 : z$ und erhält

$$J = -\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}},$$

also schließlich

$$J = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{5x^5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9x^9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{13x^{13}} - \cdots + C.$$

12. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ist in eine Reihe zu entwickeln.

Unter Benutzung der Reihe für $\sin z$ (vgl. Teil I, S. 80) wird

$$J = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots\right) dt = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Die Reihe gilt für alle Werte von x; die durch sie dargestellte Funktion heißt der *Integralsinus* und wird gewöhnlich durch $\mathrm{Si}\,(x)$ bezeichnet.[1])

13. Die gleiche Aufgabe für $\int\limits_a^b \frac{\cos t}{t} dt$.

$$J = \int\limits_a^b \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2!} + \frac{t^3}{4!} - \frac{t^5}{6!} + \cdots\right) dt = \ln\frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{2\cdot 2!} + \frac{b^4 - a^4}{4\cdot 4!} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{b^{2n} - a^{2n}}{2n\cdot(2n)!} + \cdots.$$

Die Reihe gilt für alle Intervalle von a bis b, die die Null nicht enthalten (Integralkosinus).

1) Tafeln und graphische Darstellungen des Verlaufs dieser Funktion, sowie des Integralkosinus und Integrallogarithmus (vgl. Aufg. 13 und 14) findet man bei E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin 1909, S. 19—23.

14. Die gleiche Aufgabe für $\int \frac{e^t}{t}\,dt$.

$$J = \int\left(\frac{1}{t} + 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \cdots\right)dt$$
$$= \ln t + t + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{t^4}{4!} + \cdots + C.$$

Die Reihe gilt für alle Werte von t mit Ausnahme von $t = 0$; ist t negativ, so ist das erste Glied der Reihe durch $\ln(-t)$ zu ersetzen (vgl. Regel **7**, S. 2 f.). Durch die Substitution $e^t = z$ verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\int \frac{dz}{\ln z} = \ln\ln z + \ln z + \frac{1}{2}\,\frac{(\ln z)^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{(\ln z)^3}{3!} + \cdots + C,$$

und diese Formel gilt für alle positiven Werte $z > 1$, während im Intervall $0 < z < 1$ das Glied $\ln\ln z$ durch $\ln(-\ln z)$ zu ersetzen ist. Die durch die Formel dargestellte Funktion heißt der *Integrallogarithmus* und wird gewöhnlich durch $\mathrm{li}(z)$ bezeichnet.

15. Man beweise die für alle reellen Werte von x gültige Formel

$$(1) \qquad \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\,\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\,\frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Der Beweis bedarf keiner Erläuterung; doch werde noch folgendes bemerkt: In § 13, Aufg. 12, S. 227 f. wird die Formel

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

bewiesen; mit ihrer Hilfe folgt

$$(3) \qquad \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Bei großen Werten von x wird man die Reihe (1) zur Berechnung des Integrals nicht anwenden, weil sie dann zu langsam konvergiert. Man verfährt in diesem Fall folgendermaßen:

Mit Hilfe teilweiser Integration ergibt sich leicht die Formel

$$\int \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{(2n+1)\,t^{2n+1}} - \frac{2}{2n+1}\int \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt,$$

und durch Auflösung nach dem zweiten Glied der rechten Seite dieser Gleichung und Integration von $t = x$ bis $t = \infty$, wo $x > 0$ sei, folgt

$$(4) \qquad \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt.$$

Wird diese Formel für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ hingeschrieben, so erhält man aus den so entstehenden Gleichungen sofort die Reihe:

$$
(5)\quad \begin{aligned}
\int_x^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left\{1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2x^2)^n}\right\} \\
+ (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}dt.
\end{aligned}
$$

Diese Reihe ist allerdings, wenn man sie ins Unendliche fortsetzt, *divergent*, da die absoluten Werte ihrer Glieder von einer gewissen Stelle an zunehmen; aber trotzdem ist die Reihe brauchbar, denn wenn man sie an einer Stelle abbricht, ist der absolute Wert des Fehlers kleiner als der absolute Wert des Gliedes, nach dem man abgebrochen hat. Offenbar ist nämlich der Wert des Integrals

$$
\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}dt,
$$

das einen Faktor des letzten Gliedes der rechten Seite von (5) bildet, kleiner als das Produkt aus $\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}}$ und dem größten Werte e^{-x^2}, den e^{-t^2} innerhalb der Grenzen $t = x$ und $t = \infty$ annimmt; nun ist aber

$$
\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{x^{2n+1}},
$$

daher

$$
\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}dt < \frac{e^{-x^2}}{(2n+1)\,x^{2n+1}}
$$

und

$$
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}dt < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\,\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}},
$$

und hiermit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Will man also das vorgelegte Integral mit Hilfe der Reihe (5) berechnen, so muß man bei einem Gliede abbrechen, das so klein ist, daß es vernachlässigt werden darf. Hier liegt das Beispiel einer unendlichen Reihe vor, die bei Berücksichtigung einer Anzahl n von Gliedern *zunächst* mit *wachsendem* n eine Funktion mit großer Annäherung darstellt; sobald aber die Anzahl n eine gewisse Grenze $n = N$ überschreitet, nimmt die Annäherung ab, denn man hat ja eine *divergente* Entwicklung.

Bei diesen Reihen kann der Unterschied zwischen dem wahren Wert ihrer Summe und dem angenäherten Wert nicht beliebig klein gemacht werden durch Berücksichtigung entsprechend vieler Glieder, wie dies bei den konvergenten Reihen der Fall ist, sondern die Annäherung ist begrenzt. Man nennt Reihen dieser Art *halbkonvergent.* Der Vorteil, den ihre Anwendung bietet, wächst mit wachsendem x; sie werden daher besonders angewandt, um den Wert einer Funktion für einen großen Wert der Veränderlichen zu berechnen.

16. Mit Hilfe der Formel (4), S. 202 leite man eine nach Potenzen von $\frac{1}{2x^2}$ geordnete Reihe ab für das Integral

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt, \qquad x > 0.$$

Wenn in (4), S. 202 die Zahl n der Reihe nach gleich n, $n+1$, $n+2, \ldots, n+m$ gesetzt wird, folgt leicht

$$(6)\quad \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}}\left\{1 - \frac{2n+1}{2x^2} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2x^2)^2} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^m \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2m-1)}{(2x^2)^m}\right\}$$
$$+ (-1)^{m+1}\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2m-1)(2n+2m+1)}{2^{m+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2m+2}}\,dt.$$

Auch diese Reihe ist halbkonvergent; ähnlich wie in Aufg. 15 zeigt man, daß beim Abbrechen der Reihe an irgend einer Stelle der absolute Betrag der Summe der vernachlässigten Glieder kleiner ist als der absolute Betrag des Gliedes, nach dem man abgebrochen hat.

17. Mit Hilfe von Gleichung (6) ist das Integral

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$$

in eine halbkonvergente Reihe zu entwickeln.

Durch die Annahme $n = \frac{1}{2}$ folgt aus (6)

$$(7)\quad \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^2}\left\{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 2}{x^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^6} + \cdots + (-1)^m \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{x^{2m}}\right\}$$
$$+ (-1)^{m+1}\, 1\cdot 2\cdot 3\cdots m\,(m+1)\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2m+3}}\,dt.$$

18. In Aufg. 17 setze man $t^2 = z$ und leite so eine halbkonvergente Reihe für

$$\int_\zeta^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z}$$

ab, wo $\zeta > 0$ sei. Figur 43 zeigt den Verlauf der Funktion $y = \frac{e^{-z}}{z}$.

Zunächst ergibt sich

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{x^2}^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz.$$

Hieraus folgt, wenn man x^2 durch ζ ersetzt und die Reihe (7) benutzt

$$\int_\zeta^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz = \frac{e^{-\zeta}}{\zeta}\Big\{1 - \frac{1}{\zeta} + \frac{2!}{\zeta^2} - \frac{3!}{\zeta^3} + \cdots + (-1)^m \frac{m!}{\zeta^m} + (-1)^{m+1}\cdot\vartheta\cdot\frac{(m+1)!}{\zeta^{m+1}}\Big\}, \tag{8}$$

Fig. 43.

wo ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet.

Bei kleinen Werten von ζ ist diese Reihe unbrauchbar; man bestimmt in diesem Falle das Integral mit Hilfe der nach steigenden Potenzen von z geordneten Reihe für $e^{-z} : z$. Alsdann folgt

$$\begin{aligned}\int_\zeta^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz &= \int_\zeta^\infty \Big(\frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} - \cdots\Big)\,dz \\ &= \Big[\ln z - z + \frac{1}{2}\frac{z^2}{2!} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{3!} + \frac{1}{4}\frac{z^4}{4!} - \cdots\Big]_{z=\zeta}^{z=\infty}\end{aligned} \tag{9}$$

oder

$$\begin{aligned}J = \int_\zeta^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz &= \lim_{n=\infty}\Big[\ln n - n + \frac{1}{2}\frac{n^2}{2!} - \frac{1}{3}\frac{n^3}{3!} + \cdots\Big] \\ &\qquad - \Big\{\ln\zeta - \zeta + \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{2!} - \frac{1}{3}\frac{\zeta^3}{3!} + \cdots\Big\} \\ &= J_1 - J_2,\end{aligned} \tag{10}$$

wenn man den Grenzwert des ersten Klammerausdrucks mit J_1, die zweite Klammer mit J_2 bezeichnet. Hier kann J_1 durch

$$\lim_{n=\infty}\Big\{\ln n - \int_0^1 \frac{1 - e^{-nz}}{z}\,dz\Big\}$$

ersetzt werden, wie man leicht sieht. Ferner ist

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\,dz - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\,dz,$$

wo das zweite Integral der rechten Seite für $\lim n = \infty$ verschwindet; daher wird

$$J_1 = \lim_{n=\infty}\left\{\ln n - \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\,dz\right\},$$

und wenn man $1 - z = y$ setzt, folgt

$$(11)\quad J_1 = \lim_{n=\infty}\left\{\ln n - \int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}\,dy\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{\ln n - \int_0^1 (1+y+y^2+\cdots+y^{n-1})\,dy\right\}$$

$$= \lim_{n=\infty}\left\{\ln n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Dieser Grenzwert ist nun berechnet worden, und zwar fand man

$$(12)\quad \lim_{n=\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\} = 0{,}5772156649\ldots,$$

eine Zahl, die die *Eulersche Konstante* (mitunter auch *Mascheronische Konstante*) genannt und häufig mit dem Buchstaben γ (oft auch mit C) bezeichnet wird.[1]) Während die harmonische Reihe $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ divergent ist (vgl. Teil I, S. 85), konvergiert also der Ausdruck

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

für $\lim n = \infty$ nach der endlichen Zahl $\gamma = 0{,}577\ldots$.

Aus (10) und (12) folgt nunmehr

$$(13)\qquad \int_\zeta^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz = \zeta - \frac{1}{2}\,\frac{\zeta^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{\zeta^3}{3!} - \cdots - \ln\zeta - \gamma.$$

19. Die Integration unendlicher Reihen läßt sich mitunter auch

1) Die Beziehung (12) ist natürlich zur Berechnung von γ ganz ungeeignet, weil die Glieder der divergenten harmonischen Reihe zu langsam abnehmen. Für die Methoden der Berechnung vgl. man z. B. J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 4. und 5. Aufl., bearb. von G. Scheffers, 2. Bd., Leipzig und Berlin 1911, S. 211 und 258.

benutzen, um die Summe einer solchen Reihe zu finden. Wenn z. B. die Summe S der für $x^2 \leqq 1$ konvergenten unendlichen Reihe

$$(1) \quad S = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{8n+1}}{8n+1} + \frac{x^{8n+3}}{8n+3} - \frac{x^{8n+5}}{8n+5} - \frac{x^{8n+7}}{8n+7} + \cdots$$

insbesondere also auch (für $x = +1$) die Summe der Reihe

$$(2) \quad S_1 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{8n+1} + \frac{1}{8n+3} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+7} + \cdots$$

gefunden werden soll, so beachte man, daß die Reihe (1) durch das bestimmte Integral

$$S = \int_0^x (1 + t^2 - t^4 - t^6 + \cdots + t^{8n} + t^{8n+2} - t^{8n+4} - t^{8n+6} + \cdots)\, dt$$

dargestellt werden kann, dessen Integrand, wie leicht zu sehen ist, die Summe $(1 + t^2) : (1 + t^4)$ hat. Daher wird

$$S = \int_0^x \frac{1 + t^2}{1 + t^4}\, dt.$$

Man berechne dieses Integral unter Rücksicht auf Aufg. 24 und 25, S. 134 f. und bestimme insbesondere auch die Summe S_1.

Man erhält

$$S = + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2};$$

für $x = 1$ folgt $S = S_1 = + \frac{1}{4} \pi \sqrt{2}$.

20. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{1 + t^n}\, dt,$$

in dessen Integranden m und n ganze positive Zahlen sind, durch Entwicklung in eine unendliche Reihe zu berechnen und zu zeigen, daß sich daraus für $m = 1$, $n = 3$ die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{1}{3k+1} + \cdots$$

in der Gestalt $\frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ ergibt.[1])

---

1) Zur Darstellung dieser und ähnlicher Integrale durch *Kettenbrüche* vgl. O. **Perron**, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913, S. 208.

Wird der Integrand in eine Reihe entwickelt, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividiert, so folgt

$$J = \int_0^1 (t^{m-1} - t^{m+n-1} + t^{m+2n-1} - \cdots)\, dt$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \cdots,$$

daher ist

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \cdots = \int_0^1 \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\, dt.$$

Für $m = 1$, $n = 3$ ergibt sich

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt,$$

ein Integral, das schon in Aufg. 23, S. 134 bestimmt wurde, allerdings ohne Berücksichtigung von Grenzen. Werden diese eingetragen, so erhält man den vorhin angegebenen Wert.

Die Summen zahlreicher anderer unendlicher Reihen lassen sich berechnen, wenn man m und n andere Zahlenwerte gibt; so z. B. liefert $m = 2$, $n = 2$ die Reihe

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots.$$

§ 12.

Elliptische Integrale.

1. Elliptische Integrale sind Integrale von der Form

$$\int R(x, y)\, dx,$$

wo R eine rationale Funktion von x und von

$$y = \sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}$$

bedeutet, und zwar muß hier mindestens eine der beiden Größen a_0, a_1 von Null verschieden sein und der Radikand der Quadratwurzel y darf keine doppelte Nullstelle haben, oder mit anderen Worten: die Gleichung vierten Grades, die mit $y = 0$ gleichbedeutend ist, darf keine Doppelwurzel haben. Würde dies nämlich der Fall sein, so hätte man ein schon in § 10 betrachtetes Integral, es läge kein *eigentliches* elliptisches Integral vor.

Das Wort *elliptisch* ist zugefügt, weil die wichtige Aufgabe, die Bogenlänge einer Ellipse zu bestimmen, auf ein solches Integral geführt hat.

2. Jedes eigentliche elliptische Integral kann durch eine Substitution von der Form[1])

$$x = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

in ein anderes

$$\int \varphi(z, Z)\, dz,$$

übergeführt werden, wobei

$$(1) \qquad Z = \sqrt{(az^2 + b)(cz^2 + d)} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{y} = \text{konst.} \int \frac{dz}{Z}$$

ist.

3. Jedes eigentliche elliptische Integral $\int R(x, y)\, dx$ kann in eine Summe von der Gestalt

$$\int M\, dz + \int \frac{N\, dz}{Z}$$

übergeführt werden, wo M und N rationale Funktionen von z^2 sind und Z durch (1) definiert ist.

4. Jedes eigentliche elliptische Integral kann in eine Summe zweier Integrale

$$\int P\, dx + \int \frac{Q\, dx}{X}$$

übergeführt werden, wo P und Q rationale Funktionen von x^2 sind und

$$X = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \qquad 0 < k^2 < 1$$

ist.

5. Das in Regel **4** auftretende Integral $\int \frac{Q\, dx}{X}$ läßt sich als eine Summe darstellen, deren Summanden durch die mit gewissen konstanten Faktoren multiplizierten elliptischen Integrale

$$F(k, x) = \int \frac{dx}{+\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad E(k, x) = \int \frac{+\sqrt{1 - k^2 x^2}}{+\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

$$\Pi(n, k, x) = + \int \frac{dx}{(1 + n x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

---

1) Näheres über die hier und in Regel **4** zur Verwendung kommenden Substitutionen findet man in den ausführlicheren Lehrbüchern. Wir verweisen z. B. auf J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 4. und 5. Aufl., bearbeitet von G. Scheffers, 2. Bd., Leipzig und Berlin 1911, S. 78 bis 96; H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 5. Aufl., neu bearbeitet von L. Maurer, Leipzig 1908, S. 31 f.; M. Krause (unter Mitwirkung von E. Naetsch), Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig und Berlin 1912, S. 169—181.

und durch Ausdrücke von der Form

$$g(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad g_1(x)\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{(1+nx^2)^m}$$

gebildet werden, wo $g(x)$ und $g_1(x)$ ganze Funktionen von x sind, während m eine ganze positive Zahl, k^2 ein positiver echter Bruch und n eine Konstante ist; die Veränderliche x^2 kann alle Werte von Null bis Eins annehmen.

Die Integrale $F(k, x)$, $E(k, x)$, $\Pi(n, k, x)$ lassen sich, von besonderen Fällen abgesehen, nicht in geschlossener endlicher Form durch algebraische oder die elementaren transzendenten Funktionen ausdrücken; sie sind vielmehr selbst neue transzendente Funktionen, die man durch Entwicklung in eine unendliche Reihe berechnet.

6. Die in Regel **5** erwähnten Integrale $F(k,x)$, $E(k,x)$, $\Pi(n,k,x)$ sind der Reihe nach die *elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung in der Normalform von Legendre*; die Zahl k heißt ihr *Modul*, n heißt der *Parameter* des elliptischen Integrals dritter Gattung.

7. Diese elliptischen Normalintegrale gehen durch die Substitution $x = \sin\varphi$ in die *trigonometrischen Normalformen*

$$F(k, \varphi) = \int\frac{d\varphi}{+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(k, \varphi) = +\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = +\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

über. Werden diese Integrale mit der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze φ_1 versehen, wobei (verglichen mit den Normalformen in Regel **5**) $x_1 = \sin\varphi_1$ ist, so heißt die obere Grenze φ_1 die *Amplitude* des Integrals; der Ausdruck $+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ wird gewöhnlich durch $\Delta\varphi$ bezeichnet. Da x nach Regel **5** auf das Intervall von -1 bis $+1$ beschränkt ist, kann man φ auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränken. Die Integrale F und E mit den Grenzen 0 und 1 (in der trigonometrischen Normalform mit den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$) heißen *vollständige* Integrale und werden durch K und E bezeichnet.

8. Man kann bei dem Integral

$$u = \int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

die obere Grenze φ_1 als Funktion des Integralwertes u betrachten und schreibt in diesem Falle $\varphi_1 = \operatorname{am} u$ oder genauer $\varphi_1 = \operatorname{am} u$, mod k, d. h. φ_1 ist die Amplitude von u modulo k. Alsdann wird (vgl. Regel **7**)

$$x_1 = \sin\operatorname{am} u, \quad +\sqrt{1-x_1{}^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad +\sqrt{1-k^2x_1{}^2} = \Delta\operatorname{am} u,$$

wofür man nach dem Vorschlag von Chr. Gudermann[1]) kürzer

$$x_1 = \operatorname{sn} u, \quad +\sqrt{1-x_1^2} = \operatorname{cn} u, \quad +\sqrt{1-k^2 x_1^2} = \operatorname{dn} u$$

zu schreiben pflegt. Der Ausdruck $\Delta \operatorname{am} u$ und die trigonometrischen Funktionen von $\operatorname{am} u$ heißen *elliptische Funktionen.*

Beispiele.

1. Die Werte zu bestimmen, die die mit den Grenzen 0 und φ_1 versehenen trigonometrischen Normalintegrale annehmen, wenn der Modul k gleich Null ist.

Aus Regel **7** folgt $F(0, \varphi_1) = E(0, \varphi_1) = \varphi_1$; ferner wird

$$\Pi(n, 0, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{1 + n \sin^2 \varphi}.$$

Setzt man im Nenner des Integranden $1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$, so wird

$$\Pi(n, 0, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1+n)\sin^2\varphi},$$

und dieses Integral ist im Falle $1 + n > 0$ nach Aufg. 12, S. 107 gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1+n}\,\operatorname{tg}\varphi_1\right).$$

Für $n = -1$ folgt

$$\Pi(-1, 0, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi_1.$$

Im Falle $1 + n < 0$ kann man $1 + n = -m^2$ setzen und erhält dann

$$\Pi(n, 0, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\{1 - m^2 \operatorname{tg}^2\varphi\}},$$

woraus durch die Substitution $\operatorname{tg}\varphi = z$ das Integral

$$\Pi = -\frac{1}{m^2} \int_0^{z_1} \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{m}\right)\left(z + \frac{1}{m}\right)}$$

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 18 (1838), S. 12.

hervorgeht. Nach Aufg. 2, S. 113 ist der Wert dieses Integrals ohne Berücksichtigung der Grenzen $\frac{1}{2m}\ln\frac{mz+1}{mz-1}+c$, bzw. $\frac{1}{2m}\ln\frac{1+mz}{1-mz}+c'$ (vgl. Regel **7**, S. 2f.). So ergibt sich schließlich

$$\Pi(n,\,0,\,\varphi_1)=\frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\ln\frac{1+\sqrt{-1-n}\,\operatorname{tg}\varphi_1}{1-\sqrt{-1-n}\,\operatorname{tg}\varphi_1},\quad n+1<0.$$

2. Die gleiche Aufgabe für den Fall, daß der Modul $k=1$ ist.
Hier folgt

$$F(1,\,\varphi_1)=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\qquad \text{(vgl. Aufg. 58, S. 94)},$$

$$E(1,\,\varphi_1)=\int_0^{\varphi_1}\cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi_1,$$

$$\Pi(n,\,1,\,\varphi_1)=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\cos\varphi}.$$

Dieses Integral geht durch die Substitution $\sin\varphi=z$ in

$$\int_0^{z_1}\frac{dz}{(1+nz^2)(1-z^2)},$$

worauf Partialbruchzerlegung des Integranden zum Ziel führt. Man erhält

$$\Pi(n,1,\varphi_1)=\frac{1}{2(1+n)}\ln\frac{1+\sin\varphi_1}{1-\sin\varphi_1}+\frac{\sqrt{n}}{1+n}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{n}\sin\varphi_1\right),\ \text{falls}\ n>0\ \text{ist},$$

$$\Pi(n,1,\varphi_1)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi_1}{1-\sin\varphi_1}\quad\text{für}\ n=0,$$

$$\Pi(n,1,\varphi_1)=\frac{1}{2(1+n)}\ln\frac{1+\sin\varphi_1}{1-\sin\varphi_1}+\frac{\sqrt{-n}}{2(1+n)}\ln\frac{1+\sqrt{-n}\sin\varphi_1}{1-\sqrt{-n}\sin\varphi_1}\quad\text{für}\ n<0.$$

Hierbei kann $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi_1}{1-\sin\varphi_1}$ durch $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ersetzt werden, wie sich leicht durch einfache goniometrische Umformung ergibt.

3. Mit Hilfe der Substitution $x^2=1:z$ soll gezeigt werden, daß die Integrale

$$F(k,\,x_1)=\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad\text{und}\quad\frac{1}{2}\int_{z_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-k^2)}},\ (z_1=1:x_1{}^2)$$

einander gleich sind.[1])

1) Die transformierte Form des elliptischen Integrals erster Gattung, bei der $z=0$, $z=1$, $z=k^2$ die Wurzeln des Radikanden im Nenner darstellen,

4. Man zeige, daß das elliptische Integral erster Gattung $F(k, x_1)$ in Aufg. 3 durch die Substitution

$$x^2 = \frac{3\alpha}{3z + (k^2+1)\alpha}, \tag{1}$$

wo α eine positive Zahl und z die neue Veränderliche ist, in das Integral

$$J = \sqrt{\alpha} \int_{z_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \tag{2}$$

übergeht, wo

$$e_1 = \frac{(2-k^2)\alpha}{3}, \quad e_2 = \frac{(2k^2-1)\alpha}{3}, \quad e_3 = -\frac{(k^2+1)\alpha}{3}$$

und $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist.

Die Form J des elliptischen Integrals erster Gattung wird als dessen *Weierstraßsche Normalform* bezeichnet. Die untere Grenze z_1 von J ergibt sich aus (1) durch Einsetzen von $x = x_1$ und Auflösen nach z.

5. Unter der *Schwingungsdauer eines Pendels* versteht man bekanntlich die Zeit, die das Pendel zu einer Schwingung aus der einen Grenzlage (etwa links) in die nächste Grenzlage (rechts) braucht. Diese Schwingungsdauer T soll bei einem mathematischen Pendel von der Länge l bestimmt werden; dabei werde angenommen, daß man das Pendel zur Zeit $t = 0$ in eine Lage gebracht hat, in der es mit einem nach dem Mittelpunkt der Erde gerichteten Lote den Winkel $SOA = \alpha$ (Fig. 44) bildet; alsdann überläßt man das Pendel dem Einfluß der Schwere. Der Widerstand der Luft bleibe unberücksichtigt.

O α φ A B P S mg φ

Fig. 44.

Zur Zeit t sei das Pendel unter dem Winkel $SOP = \varphi$ gegen das Lot OS geneigt; m sei die Masse des schwingenden materiellen Punktes P und g die Beschleunigung der Schwere.

Nach einem Grundgesetz der Dynamik ist das Produkt aus der Masse m und der Änderung dv, die die Geschwindigkeit des Punktes P

wurde von Riemann in seinen Vorlesungen häufig gebraucht. Vgl. B. Riemann, Elliptische Funktionen, hrsgg. von H. Stahl, Leipzig 1899, S. 13—16. Auch F. Klein (Mathematische Annalen, Bd. 14 (1879), S. 116 [1878]) hebt die Wichtigkeit dieser Form des Integrals hervor. Vgl. ferner L. Fuchs, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71 (1870), S. 113, 118, 121, Bd. 83 (1877), S. 15 ff. [1876]; Gesammelte Werke, herausgegeben von R. Fuchs und L. Schlesinger, Bd. 1, Berlin 1904, S. 265, 271, 274, Bd. 2, Berlin 1906, S. 87 ff.; R. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, Bd. 8 (1908), S. 2.

während des Zeitelements dt erfährt, gleich dem Produkt aus dt und der in Richtung der Bewegung des Punktes genommenen Komponente der wirkenden Schwere mg, oder anders ausgedrückt: das Produkt aus der Masse und der Beschleunigung ist gleich der in Richtung der Bewegung des Punktes genommenen Komponente der wirkenden Kraft. Diese Komponente ist, wie man der Figur entnimmt, gleich $mg \sin\varphi$; daher folgt

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\varphi \tag{1}$$

und hier ist $v = \frac{ds}{dt}$, wenn ds das während des Zeitelements dt beschriebene Bogenelement bezeichnet (vgl. S. 13, sowie Teil I, S. 17). Wird der von dem Pendel beschriebene Bogen von der Anfangslage OA aus gemessen, so ist $ds = -l\,d\varphi$, wobei das Minuszeichen steht, weil einer Zunahme ds des Bogens eine Abnahme des Winkels φ entspricht. Die Gleichung (1) kann daher durch

$$-l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\sin\varphi \tag{2}$$

ersetzt werden. Nach Multiplikation von (2) mit $-2\frac{d\varphi}{dt}$ folgt

$$2l\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2g\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

eine Gleichung, deren linke Seite die Abeitung von $l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ darstellt, so daß nunmehr

$$l\cdot\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{dt} = -2g\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{oder} \quad l\,d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -2g\sin\varphi\,d\varphi \tag{3}$$

hervorgeht. Durch Integration erhält man

$$l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\cos\varphi + c. \tag{4}$$

Die Integrationskonstante c ergibt sich, wenn man beachtet, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit gleich Null und $\varphi = \alpha$ ist; daher wird $c = -2g\cos\alpha$ und

$$l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{4a}$$

somit

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}. \tag{5}$$

Bezüglich des Vorzeichens ist folgendes zu beachten: Bei der Schwingung in der Richtung von A nach S nimmt φ ab, $d\varphi$ ist ne-

gativ, man hat daher ein Minuszeichen zu setzen, damit die rechte Seite der Gleichung (5) gleich der positiven Größe dt werde. Bei der Schwingung von S nach B ist $d\varphi$ positiv, man hat in (5) rechts das Pluszeichen zu setzen.

Mit Hilfe der Formeln $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ folgt

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\varphi}}. \tag{6}$$

Wie man sieht, führt die Bestimmung von t auf ein *elliptisches Integral*. Bevor wir dieses berechnen, werde die Aufgabe nur mit einer Annäherung gelöst unter der Annahme, die Amplitude α sei so klein, daß es gestattet ist $\sin\frac{1}{2}\alpha$ durch $\frac{1}{2}\alpha$ und daher auch $\sin\frac{1}{2}\varphi$ durch $\frac{1}{2}\varphi$ zu ersetzen. Alsdann wird die Zeitdauer t_1 der Schwingung von A bis S:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^0 \frac{d\varphi}{+\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{+\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \tag{7}$$

oder

$$t_1 = +\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\varphi}{\alpha}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} = +\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2}\pi. \tag{7 a}$$

Genau dieselbe Zeitdauer ergibt sich für die Schwingung von S bis zur Grenzlage OB. Daß diese Zeitdauer $t_2 = t_1$ sein muß, folgt übrigens auch aus einem Satze der Mechanik, demzufolge ein materieller Punkt, der sich lediglich unter dem Einfluß der Schwere im luftleeren Raum frei oder auf einer gegebenen Kurve oder Fläche bewegt, bei jedem Durchgang durch dieselbe Horizontalebene die gleiche Geschwindigkeit hat.

Die Zeitdauer T der Schwingung von A bis B wird demnach

$$T = t_1 + t_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8}$$

Bei Einführung der Länge l_1 des *mathematischen Sekundenpendels*, die durch $1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ bestimmt ist, kann man die Gleichung (8) auch in der Gestalt

$$T = \sqrt{\frac{l}{l_1}} \tag{9}$$

schreiben.

Will man die Schwingungsdauer T in aller Strenge ableiten, so ist auszugehen von

$$\frac{1}{2}T = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^0 \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\varphi}}. \tag{10}$$

Durch die Substitution

(11) $\sin\frac{1}{2}\alpha = k, \quad \sin\frac{1}{2}\varphi = k\sin\omega, \quad \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi = k\cos\omega\, d\omega$

geht dieser Ausdruck in das mit dem Faktor $+\sqrt{\frac{l}{g}}$ versehene vollständige Integral erster Gattung K über (vgl. Regel **7**), man erhält

$$(12) \qquad \frac{1}{2}T = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} = +\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot K.$$

Durch Reihenentwicklung folgt

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left\{1 + \frac{1}{2}(k\sin\omega)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(k\sin\omega)^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(k\sin\omega)^6 + \cdots\right\}d\omega,$$

woraus bei Anwendung der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\omega\, d\omega = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(vgl. Aufg. 76, S. 99) die Gleichung

$$(13) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

hervorgeht.

Für die Zeit t, die das Pendel braucht um von A nach P zu gelangen, findet man nach (6) und (11), wenn $\varphi \leqq \psi \leqq \alpha$ und $\sin\frac{1}{2}\psi = k\sin\chi$ ist:

$$(14) \qquad t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{\varphi}\frac{d\psi}{2\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\psi}} = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\omega^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}},$$

und mit Rücksicht auf (12) ist alsdann

$$(14\,\mathrm{a}) \quad \frac{1}{2}T - t = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\omega}\frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} = +\sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k,\,\omega), \quad t \leqq \frac{1}{2}T.$$

Dieser Ausdruck $\frac{1}{2}T - t$ stellt die Länge der Zeit dar, in der das Pendel aus der Lage OP in die vertikale Lage OS schwingt.

Bei der Berechnung des Winkels φ, den das Pendel nach Verlauf der Zeit $t < \frac{1}{2}T$ mit dem Lote OS bildet, beachte man, daß aus (14 a) nach Regel **8** die Gleichung

$$\omega = \operatorname{am}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}T - t\right)\right\}, \quad \operatorname{mod} k = \sin\frac{1}{2}\alpha,$$

hervorgeht, woraus nach (11)

$$(15)\quad \sin\frac{1}{2}\varphi = k\sin\omega = k\sin\operatorname{am}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}T-t\right)\right\},\quad \operatorname{mod} k = \sin\frac{1}{2}\alpha$$

folgt; ferner wird

$$(15\,\mathrm{a})\quad \cos\frac{1}{2}\varphi = \Delta\operatorname{am}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}T-t\right)\right\},\quad \operatorname{mod} k = \sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Auch die Geschwindigkeit v des Pendels zur Zeit $t \leqq \frac{1}{2}T$ läßt sich nun leicht berechnen. Aus den Bemerkungen zu (1) folgt

$$v = -l\frac{d\varphi}{dt}$$

und nach (4 a)

$$(16)\quad |v| = +\sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)} = +2\sqrt{gl}\,k\cos\omega$$

oder

$$(16\,\mathrm{a})\quad |v| = 2\sqrt{gl}\sin\frac{1}{2}\alpha\cos am\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}T-t\right)\right\},\quad \operatorname{mod} k = \sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Das Pendel erreicht die größte Geschwindigkeit $v = V$, wenn $\cos\omega = 1$, also $\omega = 0$ ist; dann wird nach (14 a) $t = \frac{1}{2}T$, das Pendel hängt lotrecht. Offenbar ist $V = 2\sqrt{gl}\sin\frac{1}{2}\alpha$.

6. Es soll nun die vorhergehende Aufgabe dahin abgeändert werden, daß man dem Pendel zur Zeit $t = 0$, wo es mit dem Lot OS den Winkel α bildet, eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilt. Wir erinnern hierbei an die Jedermann bekannte Tatsache, daß bei hinreichend großer Anfangsgeschwindigkeit v_0 das Pendel im vollen Kreise herumschwingt, während es bei entsprechend kleinem Werte v_0 eine ähnliche „pendelnde" Bewegung zeigt wie in dem soeben betrachteten Falle $v_0 = 0$. Man wird also unwillkürlich die Frage aufwerfen, welcher Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0 diese beiden Fälle trennt.

Auch jetzt gelten wieder die Gleichungen (1), (2), (3) und (4), aber die Integrationskonstante c in (4) erhält nun einen anderen Wert. Beachtet man, daß aus (4) für die Geschwindigkeit $v = -l\frac{d\varphi}{dt}$ die Bestimmungsgleichung

$$v^2 = 2gl\cos\varphi + cl$$

folgt, so erhält man bei Anwendung dieser Gleichung auf $t = 0$, $\varphi = \alpha$, $v = v_0$:

$$(1)\quad v_0{}^2 = 2gl\cos\alpha + cl,$$

daher

$$(2)\quad v^2 - v_0{}^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\alpha) = 4gl(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Es fragt sich, ob es nunmehr überhaupt eine Lage des Pendels gibt, in der dieses für einen Augenblick die Geschwindigkeit Null hat, und

wie groß der dieser Lage zugehörige Winkel φ ist. Zur Entscheidung dieser Frage setzt man in (2) $v = 0$ und findet alsdann:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{4gl \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + v_0^2}{4gl}. \tag{3}$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß das Pendel nur dann eine Ruhelage einnimmt, wenn

$$L \equiv 4gl \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + v_0^2 \leqq 4gl \tag{4}$$

ist, denn im Falle $4gl \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + v_0^2 > 4gl$ würde $\sin^2 \frac{1}{2} \varphi > 1$, also φ nicht reell sein.

Im Falle $L < 4gl$ wird das Pendel nach Überschreitung der lotrechten Lage OS mit allmählich abnehmender Geschwindigkeit bis zu einer gewissen Grenzlage steigen, in der es mit dem Lote OS einen Winkel β bildet, und zwar ist

$$\sin \frac{1}{2} \beta = + \sqrt{\frac{4gl \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + v_0^2}{4gl}} = + \sqrt{\frac{L}{4gl}}, \quad \cos \beta = \frac{2gl \cos \alpha - v_0^2}{2gl}, \tag{5}$$

die zugehörige Geschwindigkeit ist Null. Nachdem das Pendel diese Grenzlage erreicht hat, kehrt es wieder zurück.

Im Falle $L > 4gl$ ist die dem Pendel erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 so groß, daß dasselbe nie eine Grenzlage erreicht, der die Geschwindigkeit Null zugehört, vielmehr wird das Pendel im Kreis herumschwingen, also volle Umläufe machen.

Eine besondere Behandlung verdient der Fall $L = 4gl$; hier wird die Geschwindigkeit Null zwar in einer gewissen Grenzlage erreicht, der der Winkel $\beta = 180^0$ zugehört, aber dies geschieht, wie wir sehen werden, erst nach unendlich langer Zeit, also asymptotisch.

Wir wollen nun diese drei Fälle näher betrachten.

A. $L \equiv 4gl \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + v_0^2 < 4gl.$

Nach (2) wird

$$v^2 = l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = L - 4gl \sin^2 \frac{1}{2} \varphi, \tag{6}$$

daher

$$dt = \frac{l\, d\varphi}{\mp \sqrt{L - 4gl \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}} \tag{7}$$

oder mit Benutzung von (5):

$$dt = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \beta - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}}. \tag{8}$$

Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe ist nun analog zu verfahren wie früher (S. 216). Durch die Substitution

$$\sin \tfrac{1}{2} \beta = k, \quad \sin \tfrac{1}{2} \varphi = k \sin \omega$$

geht das zu (8) gehörige Integral in die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung über. Für die Zeitdauer der Schwingung aus der Anfangslage OA in die lotrechte Lage OS findet man

$$t_1 = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\omega_1}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}}, \tag{9}$$

wobei

$$k = \sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{v_0{}^2 + 4gl\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{4gl}}, \quad \sin\omega_1 = \frac{1}{k}\sin\frac{1}{2}\alpha$$

ist. Für die Zeitdauer der Schwingung aus der Lage OS in die Grenzlage OB, der, wie wir oben sahen, der Winkel β zugehört, findet man

$$t_2 = +\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} = +\sqrt{\frac{l}{g}}K, \tag{10}$$

wobei wieder $k = \sin\frac{1}{2}\beta$ und K das zu k gehörige *vollständige* elliptische Integral erster Gattung ist.

Dies ist dieselbe Gleichung wie (12) in der vorhergehenden Aufgabe; nur muß man beachten, daß nunmehr

$$k = +\sqrt{\frac{v_0{}^2 + 4gl\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{4gl}}$$

ist, während in (12), S. 216 k gleich $\sin\frac{1}{2}\alpha$ war. (Für $v_0 = 0$ geht natürlich der jetzige Wert k in den früheren über.)

Genau dieselbe Zeit t_2 braucht das Pendel, um aus der Grenzlage OB in die Lage OS zurückzukehren; nach Überschreiten derselben steigt das Pendel zur Grenzlage OB', der der Winkel $SOB' = SOB = \beta$ (Fig. 45) zugehört, und auch dieses Ansteigen vollzieht sich während einer Zeit, die so groß wie t_2 ist.

Fig. 45.

Die Zeitdauer T der Schwingung von B bis B' wird daher

$$T = 2t_2 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}K. \tag{11}$$

Aus (2) folgt, daß das Pendel seine größte Geschwindigkeit V in der lotrechten Lage $OS(\cos\varphi = 1)$ erreicht; offenbar ist

$$V = +\sqrt{v_0{}^2 + 4gl\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}. \tag{12}$$

B. Es sei $L \equiv 4gl\sin^2\frac{1}{2}\alpha + v_0^2 > 4gl$.

Durch Einführung der Größe $k_1^2 = 4gl : L$ geht die Gleichung (7) über in:

(13) $$dt = \mp \frac{l\,d\varphi}{\sqrt{L}\sqrt{1-k_1^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}},$$

woraus durch die Substitution $\frac{1}{2}\varphi = \omega$

(14) $$dt = \mp \frac{2l\,d\omega}{\sqrt{L}\sqrt{1-k_1^2\sin^2\omega}} = \mp k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\omega}}$$

hervorgeht.

Für die Zeitdauer der Schwingung aus der Anfangslage OA in die lotrechte Lage OS findet man

(15) $$t_1 = +k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\alpha}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\omega}},\quad k_1 = +\sqrt{\frac{4gl}{v_0^2+4gl\sin^2\frac{1}{2}\alpha}}.$$

Für die Zeitdauer der Schwingung des Pendels aus der tiefsten Lage OS in die entgegengesetzte höchste Lage OS' folgt

(16) $$t_2 = +k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\omega}} = +k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\,K.$$

Genau dieselbe Zeit braucht das Pendel, um mit Überschreitung der Stelle S' aus der Lage OS' in die Lage OS zu schwingen, denn man würde zur Berechnung dieser Zeit den Ausdruck

$$+k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\omega}}$$

finden, der durch Einführung von ψ vermöge $\omega = \pi - \psi$ in

$$t_2 = +k_1\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}$$

übergeht. Die Zeitdauer eines vollen Umlaufs des Pendels ist natürlich $2t_2$.

In der tiefsten Lage ist die Geschwindigkeit, wie aus (2) folgt:

(17) $$V = +\sqrt{v_0^2 + 4gl\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha},$$

in der höchsten Lage

(18) $$V' = +\sqrt{v_0^2 - 4gl\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

C. Es sei $L \equiv 4gl \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + v_0^2 = 4gl$.

Aus (7) folgt nun sofort

$$dt = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi}, \tag{19}$$

daher ist die Zeitdauer der Schwingung aus der Anfangslage OA in die lotrechte Lage OS:

$$t_1 = + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi} \tag{20}$$

oder mit Rücksicht auf Aufg. 58, S. 94:

$$t_1 = + \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} = + \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi + \alpha}{4}. \tag{21}$$

Mit Überschreitung der Lage OS beginnt das Pendel mit abnehmender Geschwindigkeit zu steigen, bis seine Geschwindigkeit Null wird; dies tritt, wie schon S. 218 erwähnt wurde, ein, wenn das Pendel mit der Lage OS einen Winkel von 180^0 bildet, also die zu OS entgegengesetzte Lage OS' eingenommen hat. Für die Zeit, die bis dahin verfließt, findet man

$$t_2 = + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = + \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \infty, \tag{22}$$

das Pendel nähert sich daher asymptotisch der Lage OS', ohne sie je zu erreichen.

Für die Geschwindigkeit in der tiefsten Lage findet man

$$V = 2\sqrt{gl}.$$

§ 13.

Differentiation eines bestimmten Integrals nach einer der beiden Grenzen; Differentiation und Integration nach einem Parameter.

1. Wird

$$J = \int_a^u f(x)\, dx = F(u) - F(a)$$

als eine Funktion der oberen Grenze u oder der unteren Grenze a betrachtet, so gelten die Gleichungen

$$\frac{dJ}{du} = f(u) \quad \text{und} \quad \frac{dJ}{da} = -f(a),$$

falls die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x = u$ bzw. $x = a$ stetig ist.

2. Enthält der Integrand einen willkürlichen Parameter α und wird

$$J = \int_a^u f(x, \alpha)\, dx = F(u, \alpha) - F(a, \alpha)$$

als eine Funktion von α betrachtet, so gilt die Gleichung

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^u \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx;$$

man kann daher die Differentiation eines Integrals nach einem in ihm enthaltenen Parameter statt *nach* Bestimmung des Integrals auch *vor* der Integration, d. h. unter dem Integralzeichen ausführen. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Grenzen u und a von dem Parameter α unabhängig sind; ferner soll $f(x, \alpha)$ eine stetige Funktion von x und α sein, die eine stetige partielle Ableitung nach α hat. Der Variabilitätsbereich von α kann natürlich ein anderer sein als der von x, aber wenn $f(x, \alpha)$ in dem Bereiche $a + \delta \leqq x \leqq b - \varepsilon$, wo δ und ε beliebig kleine positive Größen sind, stetig ist, so stellt auch J eine im Variabilitätsbereich des Parameters α stetige Funktion von α dar.[1])

3. Sind die Grenzen a und u bei dem soeben betrachteten Integral Funktionen von α, so gilt die Gleichung

$$\frac{dJ}{d\alpha} = f(u, \alpha)\frac{du}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^u \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

4. Für die Differentiation eines *unbestimmten* Integrals

$$J = \int f(x, \alpha)\, dx = F(x, \alpha) + c,$$

nach dem in $f(x, \alpha)$ enthaltenen Parameter α gilt die Regel

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int f(x, \alpha)\, dx = \int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx + c_1.$$

Hierbei sind c und c_1 völlig willkürliche Konstanten.

5. Ist $f(x, \alpha)$ innerhalb eines Bereiches von x und eines Bereiches von α stetig und ist

$$\int_a^u f(x, \alpha)\, dx = J,$$

so gilt die Gleichung

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} J \cdot d\alpha = \int_a^u \Big[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha\Big]\, dx$$

---

1) Über die Anwendung der vorstehenden Regeln auf Integrale mit unendlichen Grenzen vgl. man z. B. C. Jordan, Cours d'analyse, Bd. 2, Paris 1883, S. 160.

oder

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left[\int_a^u f(x, \alpha)\, dx\right] d\alpha = \int_a^u\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx.$$

Die Integration von J nach α kann daher unter dem sich auf x beziehenden Integralzeichen ausgeführt werden, mit anderen Worten:

Die Reihenfolge der beiden bei $f(x, \alpha)$ auszuführenden Integrationen ist willkürlich. Voraussetzung ist natürlich, daß das zu je einer Veränderlichen gehörige Paar von Integrationsgrenzen von der anderen Veränderlichen unabhängig ist; auch müssen diese Grenzen innerhalb der betreffenden Stetigkeitsbereiche liegen.

6. Die Differentiation und Integration eines Integrals nach einem Parameter läßt sich leicht verwenden, um aus einem Integral, dessen Wert bekannt ist, den Wert eines anderen Integrales abzuleiten.

Beispiele.

1. Die Formel

$$\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \qquad (n+1>0)$$

ist k mal nach dem Paramter n zu differenzieren.

Man erhält

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k\, dx = (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

2. Die Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a} \qquad (a>0)$$

ist $(p-1)$ mal nach a zu differenzieren.

Man erhält

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \frac{(p-1)!}{a^p},$$

insbesondere für $a = 1$:

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = (p-1)!.$$

Dieses Integral wird nach A. M. Legendre gewöhnlich durch $\Gamma(p)$ bezeichnet; Gauß benutzte das Zeichen $\Pi(p-1)$. Man nennt dieses

Integral die *Gammafunktion* oder das *Eulersche Integral zweiter Gattung*; in § 14 wird es näher betrachtet.

3. Aus der Formel

$$\int \sin \alpha x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + c$$

durch Differentiation nach dem Parameter α eine neue Formel abzuleiten.

$$\int x \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha x + \frac{x}{\alpha} \sin \alpha x + c_1.$$

4. Die gleiche Aufgabe bei

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln (a + bx) + c,$$

wenn b der Parameter ist.

Man erhält

$$\int \frac{x \, dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^2} \ln (a + bx) - \frac{x}{b(a + bx)} + c_1.$$

5. Die Formel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{+\sqrt{a}} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (a > 0)$$

n mal nach a zu differenzieren.

Man erhält

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n - 1}{2n} \cdot \frac{1}{a^n \sqrt{a}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

6. Nach Aufg. 12, S. 107 ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}. \qquad (ab > 0)$$

Man differenziere diese Gleichung je einmal nach a und einmal nach b und benutze diese beiden Ergebnisse zur Ableitung der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Die Differentiation nach a ergibt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2a\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{2a^2 b}$$

oder

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \quad \text{usf.}$$

7. Der Ausdruck

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx \qquad (a > 0)$$

ist nach b zu differenzieren und alsdann J mit Rücksicht auf die Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(vgl. Aufg. 2, S. 105) zu berechnen.

Offenbar ist

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

daher

$$J = \int \frac{a}{a^2+b^2}\,db = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + C.$$

Da für $b = 0$ auch $J = 0$ wird, ist die Integrationskonstante C gleich Null, wenn $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird; man erhält daher

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} \qquad (a > 0).$$

Für $a = 0$ ergibt sich die Formel[1])

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \pm\frac{1}{2}\pi$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $b > 0$ oder < 0 ist.

---

1) Zum Nachweis, daß der Übergang zu $a = 0$ erlaubt ist, vgl. z. B. E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1906, S. 164—166.

Man beachte, daß der Wert dieses Integrals von dem absoluten Wert der Größe b unabhängig ist. Dies ergibt sich auch, wenn in dem Integral durch die Substitution $bx = z$ an Stelle von x eine neue Integrationsveränderliche z eingeführt wird.

8. Im Anschluß an die letzte Formel zeige man, daß das Integral

$$J = \int_0^\infty \sin px \sin qx \sin rx \cdot \frac{dx}{x} \qquad (p,\, q,\, r > 0)$$

gleich $\frac{1}{4}\pi$ oder gleich 0 ist, je nachdem sich aus den Größen p, q, r, wenn man sie als Längen von Strecken deutet, ein Dreieck konstruieren läßt, das diese Strecken zu Seiten hat, oder nicht. Dabei werde noch angenommen, daß $p > q > r$ sei.[1])

Zunächst ist

$$\sin qx \sin rx = \tfrac{1}{2}\left\{\cos(q-r)x - \cos(q+r)x\right\},$$

daher

$$\sin px \sin qx \sin rx = \tfrac{1}{2}\left\{\sin px \cos(q-r)x - \sin px \cos(q+r)x\right\};$$

mit Hilfe der Formel

$$\sin px \cos(q-r)x = \tfrac{1}{2}\left\{\sin(p+q-r)x + \sin(p-q+r)x\right\}$$

und der analogen Formel für $\sin px \cos(q+r)x$ erhält man also

$$J = \frac{1}{4}\int_0^\infty \left\{\sin(p+q-r)x + \sin(p-q+r)x - \sin(p+q+r)x - \sin(p-q-r)x\right\}\frac{dx}{x}.$$

Da $p > q > r > 0$ vorausgesetzt wurde, sind die drei Größen $p+q-r$, $p-q+r$ und $p+q+r$ sicher positiv; hingegen ist $p-q-r$ negativ oder positiv, je nachdem man aus den Strecken p, q, r als Seiten ein Dreieck konstruieren kann oder nicht. Im ersten Fall wird daher mit Rücksicht auf (2) in Aufg. 7:

$$J = \tfrac{1}{4}\left\{\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\right\} = \tfrac{1}{4}\pi,$$

im zweiten Fall wird

$$J = \tfrac{1}{4}\left\{\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right\} = 0.$$

9. Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \qquad (b > 0)$$

leite man durch Multiplikation mit db und Integration nach dem Parameter b innerhalb der Grenzen $b = \alpha$ und $b = \beta$ eine neue Formel ab.

1) Vgl. A. Sommerfeld, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Jahrgang 1904, S. 118.

Man erhält

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\pi.$$

10. In Aufg. 1 wurde aus der Formel

$$(1) \qquad \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \qquad (n+1>0)$$

durch Differentiation nach dem Parameter n eine neue Formel erhalten; nun soll durch *Integration* von (1) nach dem Parameter n innerhalb der Grenzen α und β, wo $\alpha + 1 > 0$ und $\beta + 1 > 0$ sei, eine neue Gleichung abgeleitet werden.

Man findet

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

11. In gleicher Weise ist die Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

mit bezug auf den Parameter a zu behandeln.

Man findet

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = \ln\frac{\beta}{\alpha}, \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

12. Zur Berechnung von

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

setzt man zunächst $x = \alpha z$, wo $\alpha > 0$ sei, und erhält hierdurch

$$J = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2}\alpha\,dz.$$

Diese Gleichung multipliziere man nun mit $e^{-\alpha^2}d\alpha$ und integriere alsdann ihre beiden Seiten nach α innerhalb der Grenzen 0 und ∞. Alles, was sonst zur Berechnung von J erforderlich ist, findet sich dann von selbst.

Die Gleichung

$$\int_0^\infty J e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+z^2)}\alpha\,d\alpha\right]dz$$

ergibt

$$J^2 = \int_0^\infty \frac{dz}{2(1+z^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

daher

$$J = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Vgl. auch Aufg. 15, S. 202, Aufg. 9, S. 242 und Aufg. 13, S. 313. Offenbar ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = +\sqrt{\pi}.$$

13. Aus dieser letzten Formel soll man mit Hilfe der Substitution

$$x = az + \frac{b}{a}, \qquad a > 0$$

die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2z^2 - 2bz} dz = e^{\frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\pi}$$

ableiten.

14. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

spielt eine wichtige Rolle in der *Theorie der Beobachtungsfehler*. Es möge dies im folgenden kurz dargelegt werden.

Wenn eine Größe durch Beobachtung oder Messung bestimmt werden soll, wird man nicht nur *eine* Beobachtung machen, denn diese kann ja sehr leicht mit einem verhältnismäßig großen Fehler behaftet sein; man wird vielmehr eine ganze Reihe von Beobachtungen anstellen. Die hierbei auftretenden Fehler sind teils *unregelmäßig* (zufällig), d. h. sie haben ihren Grund in Umständen, die sich während des Verlaufs der Beobachtungen ändern können, teils sind sie *regelmäßig* (konstant), d. h. sie sind durch einen sich fortwährend in gleicher Weise äußernden Umstand verursacht. (Vgl. Teil I, S. 142). Wir wollen im folgenden annehmen, daß die einzelnen Beobachtungen gleiche Zuverlässigkeit haben und nur zufällige Fehler vorliegen; es soll also kein Grund vorliegen eine Beobachtung für wertvoller zu halten als eine andere. Alsdann zeigt die Erfahrung, daß bei diesen Fehlern ein gewisses Gesetz zum Ausdruck kommt, das sich auf die Größe und Häufigkeit der Fehler bezieht.

Zur Ableitung dieses Gesetzes hat Gauß zunächst als Grundsatz aufgestellt, daß der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Größe durch

das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungen dargestellt wird.[1]) Außerdem wird die durch die Erfahrung bestätigte Annahme gemacht, daß kleine Fehler häufiger vorkommen als große, und zwar um so häufiger, je kleiner sie sind; äußerst geringe Fehler werden also am häufigsten auftreten. Ferner nimmt man an, daß positive Fehler ebenso oft vorkommen wie negative.

Es sei nun x der bei einer Beobachtung begangene Fehler, und $x + \Delta x$ der Fehler bei einer anderen Beobachtung; ist n_x die Anzahl aller in das durch x und $x + \Delta x$ begrenzte Intervall fallenden Fehler und N die Gesamtzahl aller Beobachtungen, so ist $w = n_x : N$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines innerhalb des genannten Intervalls liegenden Fehlers. Hierbei soll n_x als Funktion von x betrachtet werden. Die Größe w hängt selbstverständlich von Δx ab; die Annahme scheint plausibel, daß für sehr kleine Beträge Δx die Wahrscheinlichkeit w zu Δx proportional ist, so daß angenähert $w = \varphi(x)\,\Delta x$ gesetzt werden kann, und zwar wird diese Gleichung der Wahrheit um so näher kommen, je kleiner Δx ist. Bei einer gegebenen Reihe von Fehlern ist $\varphi(x)$ ein Maß für die relative Häufigkeit des Fehlers x. Dabei darf jedenfalls angenommen werden, daß die Fehler ein gewisses Intervall nicht überschreiten, sondern zwischen gewissen Grenzen $-a$ und $+a$ gelegen sind; die Funktion $\varphi(x)$ muß dann von der Beschaffenheit sein, daß sie für $|x| > |a|$ verschwindet.

Wir lassen nun die Größe des Intervalles von x bis $x + \Delta x$ nach Null streben, indem wir Δx nach Null streben lassen und bringen dies dadurch zum Ausdruck, daß wir Δx durch dx ersetzen. Alsdann ist

$$w = n_x : N = \varphi(x)\,dx$$

die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers in dem Intervall von x bis $x + dx$; natürlich ist *dieser* Wert w unendlich klein. Da ferner die Summe aller für das Intervall von $-a$ bis $+a$ gebildeten Werte n_x gleich N sein muß, ist $\varphi(x)$ jedenfalls eine Funktion, die die Bedingung

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 1$$

erfüllt, und natürlich muß auch

$$\int_{-A}^{A} \varphi(x)\,dx = 1$$

1) Dies würde auch die „Methode der kleinsten Quadrate" ergeben. Sind nämlich $z_1, z_2, \ldots z_n$ die n beobachteten Werte der Größe z, so sind $z - z_1$, $z - z_2, \ldots z - z_n$ die Fehler der Beobachtungen. Die Forderung, daß die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum sei, führt auf die Gleichung

$$z = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n).$$

Vgl. Teil I, S. 142.

sein, wo $|A| > |a|$ ist, denn außerhalb des Intervalles von $-a$ bis $+a$ liegende Fehler kommen ja nach Voraussetzung nicht vor. Insbesondere muß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

sein.

Bildet man die Summe aller Ausdrücke $\varphi(x)dx$ für das Intervall von x_1 bis x_2, bildet man also

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx = \frac{[n_x]_{x_1}^{x_2}}{N},$$

so ist dieses Integral ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen x_1 und x_2 liege.

Theoretische Erwägungen, insbesondere von Gauß und Laplace[1]) sowie zahlreiche Erfahrungen haben gezeigt, daß die Funktion

$$\varphi(x) = c \cdot e^{-h^2 x^2},$$

wo c und h reine Zahlen bedeuten, das „*Fehlergesetz*" für $x^2 \leqq a$ sehr gut darstellt. Die Forderung

$$\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{-h^2 x^2}\,dx = 1$$

ergibt mit Rücksicht auf Aufg. 12, S. 228 für c den Wert $h : \sqrt{\pi}$, somit

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Die oben erwähnte Forderung

$$\int_{-A}^{A} c \cdot e^{-h^2 x^2}\,dx = 1$$

---

1) C. F. Gauß, Theoria motus corporum coelestium, (1809), Art. 175—179; Gauß Werke, Bd. 7, Leipzig 1906, S. 240—246; P. S. Laplace, Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, Buch 2, Kap. 4; 3. Aufl., Paris 1820, Art. 23; Oeuvres complètes, Bd. 7, Paris 1886, S. 343. Vgl. auch F. W. Bessel, Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, Astronomische Nachrichten, Bd. 15 (1838), S. 369; Bessels Abhandlungen, hrsgg. von R. Engelmann, Bd. 2, Leipzig 1876, S. 372—391. Im übrigen verweisen wir zur näheren Orientierung über die Theorie der Beobachtungsfehler auf die Werke: E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891; F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1907; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Aufl., Bd. 1, Leipzig und Berlin 1908, besonders S. 246—275; A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe von H. Liebmann, Leipzig und Berlin 1912.

ist natürlich nur angenähert erfüllt, um so genauer je größer A ist. Tatsächlich erreicht

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A} e^{-t^2}\cdot dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{A} e^{-t^2}\, dt$$

schon für $A = 3$ den Wert 0,9999779 und für $A = 4$ ergibt sich

Fig. 46.

Fig. 47.

0,99999998458.[1]) Figur 46 stellt die Kurve $y = e^{-x^2}$ dar, Figur 47 die Kurve

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt.$$

Die Zahl h kann mit Gauß[2]) als ein Maß der Genauigkeit oder Präzision der Beobachtungen gedeutet werden. Offenbar ist nämlich

$$w_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\xi}^{+\xi} e^{-h_1{}^2 x^2}\, dx = \frac{2h_1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\xi} e^{-h_1{}^2 x^2}\, dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei irgend einer Beobachtungsreihe, für die die Zahl h den Wert h_1 hat, ein Fehler vom absoluten Betrag $|x|$ kleiner als die positive Größe ξ oder ihr gleich sei, und

$$w_2 = \frac{2h_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{|\eta|} e^{-h_2{}^2 y^2}\, dy$$

hat die entsprechende Bedeutung für eine ganz andere Beobachtungs-

---

1) Eine Tafel für die Werte der Funktion $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$ findet man z. B. bei E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 411; eine Tafel für dieselbe Funktion und ihre sechs ersten Ableitungen findet man bei H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig und Berlin 1906, im Anhang; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Bd., 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1908, S. 385—404; E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin 1909, S. 33—42; A. A. Markoff a. a. O., S. 312—317.

2) Theoria motus corporum coelestium (1809), Art. 178; Gauß Werke, Bd. 7, Leipzig 1906, S. 245.

reihe mit $h = h_2$ und für das Intervall von 0 bis $+\eta$. Durch die Substitutionen $h_1 x = z_1$, $h_2 y = z_2$ gehen diese beiden Integrale über in

$$w_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h_1 \xi} e^{-z_1^2} dz_1, \quad w_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h_2 \eta} e^{-z_2^2} dz_2;$$

daher wird $w_1 = w_2$, falls $h_1 \xi = h_2 \eta$ ist. Wird diese Beziehung angenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines dem Intervall von 0 bis ξ bei der ersten Beobachtungsreihe angehörigen Fehlers gerade so groß wie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines dem Intervall von 0 bis η angehörigen Fehlers bei der zweiten Reihe. Je größer nun ξ, verglichen mit η, bei einer willkürlich aber fest gewählten Wahrscheinlichkeit $w_1 = w_2$ ist, um so ungenauer ist die erste Beobachtungsreihe, verglichen mit der zweiten; oder m. a. W. um so genauer ist die zweite Reihe, verglichen mit der ersten. Für $\xi > \eta$ ist aber auch $h_2 > h_1$, daher ist die Genauigkeit proportional zu der in der Funktion $\varphi(x)$ auftretenden Zahl h, diese Zahl kann somit in der Tat als ein Maß für die Präzision der Beobachtungen angesehen werden.

Einen Ausdruck, der die Größe h in ihrer Abhängigkeit von den begangenen Fehlern $x_1, x_2, \ldots x_n$ darstellt, gibt Gauß[1]) in der Gestalt

$$h = \sqrt{\frac{n}{2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}}$$

wo n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. F. Hausdorff[2]) findet, daß das Präzisionsmaß h rund der reziproke Wert derjenigen Zahl ist, die von 16% der beobachteten Fehler überschritten, von 84% nicht erreicht wird.

15. Auf das in Aufg. 12 berechnete Integral

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = +\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

führe man

$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{+\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}$$

zurück durch die Substitution $x = e^{-z^2}$.

---

1) Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Art. 3, Zeitschrift für Astronomie, Bd. 1 (1816); Gauß Werke, Bd. 4, Göttingen 1873, S. 111.

2) Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. 53 (1901), S. 164—166.

Hier wird $\ln \frac{1}{x} = z^2$, $dx = -2ze^{-z^2}dz$, daher

$$J_1 = \int_{\infty}^{0} -2e^{-z^2}dz = +\sqrt{\pi}.$$

16. Die Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = +\sqrt{\pi}$$

dadurch zu beweisen, daß man bei dem in Aufg. 12 berechneten Integral

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

x^2 durch x ersetzt.

17. Setzt man in dem Integral von Aufg. 13 die Größe $b = 0$ und erstreckt man die Integration von 0 bis ∞, so folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2z^2}dz = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi}.$$

Aus dieser Formel leite man durch Differentiationen nach dem Parameter a andere Formeln ab.

Zunächst folgt

$$\int_0^{\infty} z^2 e^{-a^2z^2}dz = \frac{1}{2^2a^3}\sqrt{\pi},$$

alsdann

$$\int_0^{\infty} z^4 e^{-a^2z^2}dz = \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot a^5}\sqrt{\pi};$$

allgemein wird

$$\int_0^{\infty} z^{2n} e^{-a^2z^2}dz = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}\cdot a^{2n+1}}\sqrt{\pi},$$

wo n eine ganze positive Zahl ist.

18. Die *kinetische Energie (lebendige Kraft) einer Masse m*, die sich mit der Geschwindigkeit u bewegt, ist bekanntlich $\frac{1}{2}mu^2$. Man bestimme hiernach die gesamte kinetische Energie T' der geradlinigen Bewegungen der in der Volumeinheit enthaltenen n Moleküle eines Gases, wenn die Anzahl dn derjenigen Moleküle, deren absolute Geschwindigkeit einen zwischen u und $u + du$ gelegenen Betrag hat, durch das Maxwellsche *Verteilungsgesetz* (vgl. Aufg.. 27, S. 72)

$$dn = \frac{4n}{c^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{u^2}{c^2}}u^2du \tag{1}$$

gegeben ist.

Die gesamte kinetische Energie T' der geradlinigen Bewegungen aller n Moleküle ergibt sich, wenn man dn mit $\frac{1}{2}mu^2$ multipliziert und alle diese Produkte addiert, d. h. über $\frac{1}{2}mu^2 dn$ von $u=0$ bis $u=\infty$ integriert. Man erhält

$$(2) \qquad T' = \frac{2mn}{c^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^4 e^{-\frac{u^2}{c^2}} du$$

oder (nach Aufg. 17)

$$(3) \qquad T' = \frac{3}{4} mnc^2 = \frac{3}{4} Mc^2,$$

wenn M die Gesamtmasse mn der in der Volumeinheit enthaltenen n Moleküle bedeutet. Umgekehrt folgt

$$(4) \qquad c = 2\sqrt{\frac{T'}{3M}}.$$

Sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Geschwindigkeiten der einzelnen Moleküle, so ist die kinetische Energie:

$$T' = \tfrac{1}{2} m (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2),$$

und bei Einführung des Mittelwertes U^2 der Quadrate der einzelnen Geschwindigkeiten:

$$(5) \qquad U^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}{n}$$

wird $T' = \frac{1}{2} mnU^2 = \frac{1}{2} MU^2$, daher ergibt sich mit Rücksicht auf (3):

$$(6) \qquad U^2 = \tfrac{3}{2} c^2.$$

Wir haben vorhin nur von der kinetischen Energie der *geradlinigen Bewegungen der Moleküle* gesprochen; in Wirklichkeit hat jedes Molekül noch eine innere Energie, nämlich die lebendige Kraft der Schwingungen, die die Atome des Moleküls ausführen und etwaiger Rotationen des Moleküls. Nach den Anschauungen der *kinetischen Theorie der Gase* ist die vorhin bestimmte kinetische Energie T' der absoluten Temperatur T des Gases proportional, und zwar findet man die Beziehung[1])

$$(7) \qquad T' = \tfrac{1}{2} M U^2 = \tfrac{3}{2} RTG,$$

wo R die sogenannte Gaskonstante (vgl. Teil I, S. 34), g die Beschleunigung der Schwere und G das Gewicht Mg bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt übrigens die zur Berechnung von U wichtige Gleichung

$$(8) \qquad U = \sqrt{3RTg}.$$

1) Vgl. z. B. H. Lorenz, Technische Wärmelehre, München und Berlin 1904, S. 14.

Mit der Größe U, die nach (5) die Quadratwurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der einzelnen Geschwindigkeiten der n Moleküle darstellt, ist der früher (S. 72) bestimmte Mittelwert u_m der Geschwindigkeiten nicht zu verwechseln; es wurde gefunden

$$u_m = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}, \tag{9}$$

und wenn man für c den Ausdruck (4) einführt und die Gleichung (7) beachtet, ergibt sich

$$u_m = 4\sqrt{\frac{T'}{3M\pi}} = 4\sqrt{\frac{RTg}{2\pi}}. \tag{10}$$

Wie man sieht, besteht zwischen U und u_m die Beziehung

$$u_m = \frac{4}{\sqrt{6\pi}}U = 0{,}9213\,U. \tag{11}$$

Bei Anwendung der Gleichung (8) auf *Wasserstoff*, für den die Gaskonstante gleich 422 ist, findet man bei einer Temperatur von 0^0 C (also $T = 273$) mit $g = 9{,}81$ für U den sehr großen Betrag von 1841 m/sek; ferner wird $u_m = 1696$ m/sek.

Bei der *atmosphärischen Luft* ist $R = 29{,}27$ (vgl. Teil I, S. 34); man findet $U = 485$ m/sek, $u_m = 447$ m/sek, falls $T = 273$ ist.

Infolge zahlreicher Zusammenstöße mit anderen Molekülen werden natürlich nur sehr kleine Strecken mit diesen großen Geschwindigkeiten zurückgelegt, Strecken, die durchschnittlich etwa der Größenordnung $\frac{1}{10000}$ mm entsprechen.[1])

Die Formel (8) läßt sich auch noch in der Gestalt

$$U = 485\sqrt{\frac{T}{273\gamma}} \tag{12}$$

schreiben, wo γ das spezifische Gewicht des Gases bedeutet, bezogen auf das spezifische Gewicht der atmosphärischen Luft als Einheit.[2]) Für die Gaskonstante R hat man nämlich, wie aus der in Teil I, S. 34 mitgeteilten Berechnung der Gaskonstanten für Luft (29,27) hervorgeht, allgemein den Ausdruck

$$R = \frac{10333 \cdot 0{,}7734}{273\gamma} = \frac{29{,}27}{\gamma};$$

1) Vgl. z. B. W. Nernst, Theoretische Chemie, 7. Aufl., Stuttgart 1913, S. 205—207.

2) Vgl. R. Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, 2. Abt., Braunschweig 1867, S. 255; R. Clausius, Die mechanische Wärmetheorie, 3. Bd., Die kinetische Theorie der Gase, hrsgg. von M. Planck und C. Pulfrich, 2. Aufl. Braunschweig 1889—1891, S. 34.

daher wird

$$U = \sqrt{\frac{3 \cdot 29{,}27\, Tg}{\gamma}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 29{,}27 \cdot 273\, Tg}{273\,\gamma}}.$$

Hier ist nun $\sqrt{3 \cdot 29{,}27 \cdot 273 g} = 485$ der Wert von U für Luft von 0^0 C, es folgt also in der Tat

$$U = 485 \sqrt{\frac{T}{273\,\gamma}}.$$

Daß $u_m < U$ sein muß, zeigt übrigens auch eine schon in Teil I, S. 141 abgeleitete Ungleichung; bei Anwendung auf den jetzt vorliegenden Fall ist hiernach für $k > 1$

$$\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right)^k < \frac{u_1^k + u_2^k + \cdots + u_n^k}{n}.$$

Setzt man $k = 2$, so ergibt sich $u_m^2 < U^2$, also $u_m < U$.

19. Bei einem an zwei Stellen A und B horizontal gelagerten Balken, der kontinuierlich belastet ist, wie Figur 24, S. 36 zeigt, ist das dem Querschnitt Q mit der Abszisse x zugehörige Biegungsmoment M_x nach Gleichung (5), S. 36 gegeben durch

$$(1) \qquad M_x = A(x-a) - \int_{x_1}^{x} (x - \xi)\, q(\xi)\, d\xi.$$

Es ist zu zeigen, daß man durch Differentiation dieses Ausdrucks nach x die dem Querschnitt Q entsprechende Querkraft V_x erhält.

Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$M_x = A(x-a) - x\int_{x_1}^{x} q(\xi)\, d\xi + \int_{x_1}^{x} \xi\, q(\xi)\, d\xi,$$

so folgt nach Regel **1**, S. 221:

$$(2) \qquad \frac{dM_x}{dx} = A - \int_{x_1}^{x} q(\xi)\, d\xi - xq(x) + xq(x) = A - \int_{x_1}^{x} q(\xi)\, d\xi,$$

und dieser Ausdruck ist nach Gleichung (4), S. 36 tatsächlich die dem Querschnitt Q entsprechende Querkraft V_x.

20. Unter den Voraussetzungen von Aufg. 19 ist zu zeigen, daß man durch Differentiation der Querkraft V_x nach x die mit dem Faktor -1 multiplizierte, der Stelle x entsprechende Belastung erhält.

Aus

$$V_x = A - \int_{x_1}^{x} q(\xi)\, d\xi$$

folgt nach Regel **1**, S. 221:

$$\frac{dV_x}{dx} = \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -q(x).$$

21. Man bestimme das Integral

$$J = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx,$$

indem man J zunächst nach α differenziert; wird alsdann das in $\frac{dJ}{d\alpha}$ noch vorkommende Integral mit der Integrationsveränderlichen x berechnet und hierauf $\frac{dJ}{d\alpha}$ nach α integriert, so ergibt sich J.

Nach Regel **3**, S. 222 ist

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \int_0^\alpha \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)},$$

und wenn man auf das noch vorhandene Integral eine Partialbruchzerlegung anwendet, folgt

$$\int_0^\alpha \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^\alpha \left\{\frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \alpha \operatorname{arc\,tg} x - \ln(1+\alpha x)\right]_{x=0}^{x=\alpha}$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\left\{\alpha \operatorname{arc\,tg} \alpha - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)\right\},$$

daher

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}$$

und

$$J = \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\, d\alpha.$$

Durch Anwendung der Methode der teilweisen Integration erhält man

$$J = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2) - \int \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\, d\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\, d\alpha + C$$

oder

$$J = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2) + C.$$

Da für $\alpha = 0$ auch $J = 0$ ist, ergibt sich $C = 0$, somit schließlich[1])

$$\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2).$$

---

1) Vgl. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Bd. 1, Paris 1902, S. 324.

22. In dem Integral

$$J = \int_a^u f(x, \alpha) dx$$

seien die Integrationsgrenzen sowie der Parameter α Funktionen eines anderen Parameters λ; man bestimme $\frac{dJ}{d\lambda}$.

Man erhält

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{\partial J}{\partial u}\frac{du}{d\lambda} + \frac{\partial J}{\partial a}\frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\lambda}$$

oder mit Rücksicht auf Regel **1** und **2**:

$$\frac{dJ}{d\lambda} = f(u, \alpha)\frac{du}{d\lambda} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\lambda} + \frac{d\alpha}{d\lambda}\int_a^u \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Diese Gleichung ist etwas allgemeiner als die in Regel **3** angegebene.

§ 14.

Die Eulerschen Integrale erster und zweiter Gattung.

(Beta- und Gammafunktionen).

1. Als *Eulersches Integral erster Gattung* oder *Betafunktion*[1]) bezeichnet man den Ausdruck

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

wo $p > 0$ und $q > 0$ ist.

2. Als *Eulersches Integral zweiter Gattung* oder *Gammafunktion*[2]) bezeichnet man den Ausdruck

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx, \quad \text{wo } p > 0.$$

---

1) Die Bezeichnung intégrale Eulérienne de la première espèce stammt von A. M. Legendre, Exercices de calcul intégral, Bd. 1, Paris 1811, S. 222; Eulers erste Untersuchungen über diese Funktionen finden sich in den Commentarii Academiae Petropolitanae Bd. 5, ad annos 1730 et 1731, Petersburg 1738, S. 40; vgl. ferner eine Abhandlung in den Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 16, (1771), Petersburg 1772, S. 91. Die Bezeichnung *Betafunktion* stammt von J. Ph. Binet, Journal de l'École Polytechnique, cahier 27 (1839), S. 131.

2) Die Bezeichnung intégrale Eulérienne de la seconde espèce und das Zeichen Γ stammt von A. M. Legendre, Mémoires de l'Institut de France, (1809) Paris 1810, S. 477; Exercices de calcul intégral, Bd. 1, Paris 1811, S. 276 f.

3. Bereits in Aufg. 18, S. 108 wurde unter der Voraussetzung, daß p und q ganze positive Zahlen sind, die Formel

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

gefunden, und in Aufg. 2, S. 223 unter der Voraussetzung, daß p eine ganze positive Zahl ist, die Formel

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx = (p-1)!$$

Insbesondere ist übrigens zu merken $\Gamma(1) = 1$.

Im folgenden müssen aber p und q nicht *ganze* positive Zahlen sein, sondern p und q sollen jetzt *irgend welche positive* Zahlen sein.

Beispiele.

1. Mit Hilfe der Substitution $x = 1 - z$ beweise man die Formel

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\,dx,$$

d. h.

$$\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p).$$

2. Mit Hilfe der Substitution $x = z : (1 + z)$ die Formel

$$\mathrm{B}(p, q) \equiv \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$$

zu beweisen, aus der nach Aufg. 1 noch

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$$

folgt.

Euler behandelte dieses Integral in seinen Institutiones calculi integralis, Bd. 4, Petersburg 1794, S. 337 (nach einem Manuskript aus dem Jahre 1781). Nähere geschichtliche Bemerkungen über die Beta- und Gammafunktionen findet man z. B. bei N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906. Außer diesem Werk seien für die Theorie der beiden Funktionen noch genannt J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 4. und 5. Aufl., bearb. von G. Scheffers, 2. Bd. Integralrechnung, Leipzig und Berlin 1911, S. 196—263; J. Thomae, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen, Leipzig und Berlin 1908, S. 133 bis 151; G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, hrsgg. von G. Arendt, Braunschweig 1904, S. 100—124 und an einigen anderen Stellen.

3. Die Formel

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx$$

zu beweisen.

Nach Aufg. 2 ist

$$2\,\mathrm{B}(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx.$$

Dieses Integral läßt sich als Summe zweier anderen Integrale mit demselben Integranden schreiben, von denen das eine die Grenzen 0 und 1, das andere die Grenzen 1 und ∞ hat. Das letztgenannte geht aber durch die Substitution $x = 1 : z$ in das erste über, es ist somit

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx = 2 \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx.$$

4. Mit Hilfe der Methode der teilweisen Integration soll die Formel

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

bewiesen werden.

Man hat nach Regel **2**

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p\, dx,$$

und hieraus folgt

$$\Gamma(p+1) = \Big[- e^{-x} x^p\Big]_0^\infty + \int_0^\infty p \cdot e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet, da p eine positive Zahl ist (vgl. Teil I, S. 71 f., Regel **1** oder **2**).

Offenbar ist auch

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-k)\Gamma(p-k),$$

wo $p - k > 0$ sein muß.

5. Wenn man in der Formel

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-z} z^{p-1} dz, \quad p > 0$$

an Stelle der Veränderlichen z eine neue Veränderliche α durch die Substitution $z = x\alpha$, $dz = x\, d\alpha$ einführt, erhält man leicht die Formel

$$(1) \qquad \frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-x\alpha} \cdot \alpha^{p-1} \cdot d\alpha;$$

andrerseits ist

$$(2) \qquad \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{q+p-1}}{x^p} dx.$$

Man soll nun in das letzte Integral für $\frac{1}{x^p}$ den durch (1) gegebenen Wert eintragen, ferner unter Benutzung von Regel **5**, S. 222 die Integration in bezug auf x ausführen und hierdurch die Formel

$$(3) \qquad \mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ableiten.

Man erhält zunächst

$$\Gamma(q) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-x} x^{q+p-1} \left[\int_0^\infty e^{-x\alpha} \alpha^{p-1} d\alpha \right] dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-(1+\alpha)x} \cdot x^{q+p-1} dx \right] \alpha^{p-1} \cdot d\alpha,$$

woraus sofort

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(p+q) \cdot \alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+q}} d\alpha = \Gamma(p+q) \cdot \mathrm{B}(p, q)$$

hervorgeht (vgl. Aufg. 2, S. 239). Diese Formel zeigt wieder, daß die Funktion $\mathrm{B}(p, q)$, wie schon in Aufg. 1, S. 239 bemerkt wurde, in p und q symmetrisch ist.

6. Mit Hilfe der Formeln

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{und} \quad \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

soll die Gleichung

$$\mathrm{B}(p+1, q) = \frac{p}{p+q} \mathrm{B}(p, q)$$

bewiesen werden.

7. Die Formel

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \qquad (0 < p < 1)$$

zu beweisen unter Benutzung der in Aufg. 5 abgeleiteten Formel und des Ergebnisses von Aufg. 34, S. 142.

In Aufg. 5 ist q durch $1-p$ zu ersetzen; alsdann wird

$$\Gamma(p+q) = \Gamma(1) = 1$$

(Regel **3**, S. 239), somit

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \mathrm{B}(p, 1-p),$$

wofür nach Aufg. 2 das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

gesetzt werden kann; dieses wurde in Aufg. 34, S. 142 bestimmt und gleich $\pi : \sin(p\pi)$ gefunden.

8. Man mache sich klar, daß aus der soeben abgeleiteten Formel im Falle $p = \frac{1}{2}$ die Gleichung

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}$$

hervorgeht.

Bei Gelegenheit dieser Bestimmung von $\Gamma(\frac{1}{2})$ möge noch bemerkt werden, daß sich die Funktion $\ln \Gamma(1+p)$ in eine unendliche Reihe entwickeln läßt, die für $|p| < 1$ gleichmäßig konvergiert und zur Berechnung von $\ln \Gamma(1+p)$ benutzt werden kann. Näheres hierüber findet man in den ausführlicheren Lehrbüchern.[1]) — Einige Werte von $\Gamma(p)$ für das Intervall von $\Gamma(1)$ bis $\Gamma(2)$ sind am Schluß dieses Paragraphen in einer Tafel zusammengestellt. Diese läßt sich natürlich auch zur Berechnung solcher Funktionswerte benutzen, deren Argument größer als 2 ist, denn nach Aufg. 4 ist z. B.

$$\Gamma(4{,}35) = 3{,}35 \cdot \Gamma(3{,}35) = 3{,}35 \cdot 2{,}35 \cdot 1{,}35 \cdot \Gamma(1{,}35).$$

Auch die Funktion $\mathrm{B}(p, q)$ kann in eine unendliche konvergente Reihe entwickelt werden.[2])

9. Die in Aufg. 12, S. 227f. bewiesene Formel

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

soll nun mit Hilfe von

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{p-1}\,dt$$

abgeleitet werden, indem man $t = x^2$, $p = \frac{1}{2}$ setzt und $\Gamma(\frac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}$ berücksichtigt.

1) Vgl. z. B. J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 4. und 5. Aufl., bearb. von G. Scheffers, 2. Bd. Integralrechnung, Leipzig und Berlin 1911, S. 208—214 (Nr. 503—505); J. H. Graf, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale, Bern 1894, S. 46f.; N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, S. 37—42. Vgl. auch H. Burkhardt, Comptes rendus de l'académie de Paris, Bd. 156 (1913), S. 1212.

2) Vgl. E. Catalan, Comptes rendus de l'académie de Paris, Bd. 47 (1858), S. 546 f.

10. Aus der zur Definition der Betafunktionen dienenden Gleichung

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

soll die Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m z \cos^n z\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, \quad (m+1>0,\ n+1>0),$$

abgeleitet werden, indem man $x = \sin^2 z$ und $2p-1=m$, $2q-1=n$ setzt.

Man erhält zunächst für $p>0$, $q>0$:

$$\mathrm{B}(p, q) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} z \cos^{2q-1} z\,dz = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \text{usw.}$$

Insbesondere wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m z\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m z\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} = +\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

$$(m+1>0).$$

Diese Formeln sind Verallgemeinerungen der Formeln in Aufg. 87, S. 103f. und Aufg. 76, S. 99, bei denen die Exponenten von Sinus und Kosinus *ganze* positive Zahlen sein mußten.

11. Die Richtigkeit der Gleichung

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{m}\right)$$

mit Hilfe der Substitution $x^n = z$ zu beweisen.

Folgt auf Grund der Definition der Betafunktion in Regel **1**, S. 238. Für $m = n$ erhält man insbesondere

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\,\pi}{\sin\left(\frac{1}{n}\,\pi\right)}$$

(vgl. Aufg. 5 und 7).

12. Im Anschluß an Aufg. 11 bestimme man

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

16*

Offenbar ist

$$J = \frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

Mit Hilfe der Ergebnisse von Aufg. 7 und 8 kann hierfür

$$J = \frac{1}{4}\,\frac{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}{\sqrt{2\pi}}$$

gesetzt werden oder auch, da $\Gamma(\frac{1}{4}) = 4\,\Gamma(\frac{5}{4})$ ist,

$$J = \frac{4\{\Gamma(\frac{5}{4})\}^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Bei Benutzung der Tafel auf S. 245 findet man $J = 1{,}31103$. Vgl. auch Aufg. 14.

13. Das Integral

$$J = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx$$

soll mit Hilfe der Substitution $x = z^{\frac{1}{4}}$ auf die Differenz zweier Betafunktionen zurückgeführt werden und alsdann soll man mit Hilfe der in Aufg. 5 und 8 bewiesenen Gleichungen zeigen, daß

$$J = \frac{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}{4\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}$$

ist.

Man erhält zunächst

$$J = \frac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1-z^{\frac{1}{2}}}{1+z^{\frac{1}{2}}}}\,dz = \frac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)(1-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot dz$$

oder

$$J = \tfrac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot dz - \tfrac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{1}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot dz = \tfrac{1}{4}\mathrm{B}(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4}\mathrm{B}(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2}).$$

14. Das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx$$

soll durch die Substitution $x^m = z$ auf eine Betafunktion zurückgeführt werden.

Man erhält

$$J = \frac{1}{m}\int_0^1 z^{\frac{p}{m}-1}(1-z)^{q-1}\,dz = \frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right).$$

Auch mit Hilfe dieser Formel läßt sich Aufg. 12 lösen; man hat in dem bei Aufg. 14 vorgelegten Integral $p = 1$, $m = 4$, $q = \frac{1}{2}$ zu setzen.

15. Zu zeigen, daß das Integral

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

mit Hilfe der Substitution $e^{-x} = z$, $x = \ln \frac{1}{z}$ in die Gestalt

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{p-1} dz$$

übergeht.

Wir stellen noch die auf sieben bzw. sechs Dezimalstellen berechneten Werte von $\log \Gamma(p)$ und von $\Gamma(p)$ für mehrere zwischen $p = 1$ und $p = 2$ gelegene Argumente in einer Tafel zusammen[1]):

p	$\log \Gamma(p)$	$\Gamma(p)$	p	$\log \Gamma(p)$	$\Gamma(p)$
1,00	0,0000000	1			
1,05	0,9883379—1	0,973504	1,55	0,9488374—1	0,888868
1,10	0,9783407—1	0,951359	1,60	0,9511020—1	0,893515
1,15	0,9699007—1	0,933049	1,65	0,9542989—1	0,900117
1,20	0,9629225—1	0,918169	1,70	0,9583912—1	0,908639
1,25	0,9573211—1	0,906402	1,75	0,9633451—1	0,919063
1,30	0,9530203—1	0,897478	1,80	0,9691287—1	0,931384
1,35	0,9499515—1	0,891151	1,85	0,9757126—1	0,945611
1,40	0,9480528—1	0,887264	1,90	0,9830693—1	0,961766
1,45	0,9472677—1	0,885661	1,95	0,9911732—1	0,979881
1,50	0,9475449—1	0,886227	2,00	0,0000000	1

§ 15.

Berechnung des Inhalts ebener Flächenstücke (Quadratur).

Schon in den Paragraphen 1, 3, 4 und 6 wurden Aufgaben über den Inhalt ebener Flächen gelöst. Doch kam damals nur die folgende Regel in Anwendung (Regel **6**, S. 2):

1. Die ebene Fläche, die durch einen oberhalb der x-Achse stetig verlaufenden Bogen $P_1 P_2$ der Kurve $y = f(x)$, die Ordinaten der Endpunkte P_1, P_2 und das zwischen den Fußpunkten $x = a$ und $x = b > a$

1) A. M. Legendre hat die Werte von $\log \Gamma(p)$ für das Intervall von $p = 1$ bis $p = 2$ auf 12 Dezimalen berechnet, wobei die Werte von p um $\frac{1}{1000}$ fortschreiten (Exercices de calcul intégral, Bd. 2, Paris 1817, S. 85—95). Vgl. auch E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin 1909, S. 29—31.

dieser Ordinaten liegende Stück der Abszissenachse begrenzt wird, hat den Inhalt

$$F = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel ω wird

$$F = \sin\omega \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Wir fügen nun noch weitere Regeln hinzu.

2. Ist die in Regel **1** vorkommende Kurve durch eine Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben und sind t_1, t_2 die Parameter der Punkte P_1, P_2, so tritt an Stelle von (1) die Formel

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{3}$$

3. Werden die Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ der Kurve $y = f(x)$ mit dem Koordinatenanfang O durch die Radienvektoren OP_1 und OP_2 verbunden, so ist der Inhalt S des Sektors P_1OP_2 mit Hilfe der Formel

$$S = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx) \tag{4}$$

zu bestimmen. Je nachdem man bei dieser Integration x oder y als Integrationsveränderliche benutzt, sind die Grenzen x_1 und x_2 oder y_1 und y_2.

Ist der Radiusvektor OP_1 so zu OP_2 gelegen wie die positive Richtung der x-Achse zur positiven Richtung der y-Achse, so ergibt sich für S ein positiver Zahlenwert, im entgegengesetzten Falle ein negativer Wert.

Bei einer durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebenen Kurve ist

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \{\varphi(t)\,\psi'(t) - \psi(t)\,\varphi'(t)\}\,dt \tag{5}$$

mit entsprechender Vorzeichenregel.

4. Der Flächeninhalt des Sektors P_1OP_2, der durch die Radienvektoren OP_1, OP_2 und den Bogen P_1P_2 einer durch ihre Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\vartheta)$ gegebenen Kurve begrenzt wird, ist

$$S = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{r^2}{2}\,d\vartheta, \tag{6}$$

wobei ϑ_1 und ϑ_2 die zu P_1 und P_2 gehörigen Polarwinkel bedeuten. Der Zahlenwert S wird positiv oder negativ, je nachdem beim Durchlaufen des Kurvenbogens von P_1 in der Richtung nach P_2 der Polarwinkel ϑ wächst oder abnimmt.

Beispiele.

1. Die Fläche der gemeinen Zykloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

zu bestimmen, die zwischen der x-Achse und demjenigen Zykloidenbogen liegt, der durch einmaliges Abrollen des die Kurve erzeugenden Kreises entsteht (vgl. Fig. 35 in Teil I, S. 98). Das Intervall von t erstreckt sich daher von 0 bis 2π.

Man findet

$$F = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2\, dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt$$

oder (vgl. Aufg. 41, S. 85)

$$F = a^2\left[t - 2\sin t + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 3a^2\pi,$$

die Fläche ist dreimal so groß wie der Inhalt des rollenden Kreises.

2. Man bestimme die Fläche der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ für das Intervall von t_1 bis t_2.

$$F = -\int_{t_1}^{t_2} ab\,\sin^2 t\, dt = -ab\left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{t_1}^{t_2},$$

vgl. Aufg. 42, S. 85.

Das im ersten Quadranten des Koordinatensytems gelegene Flächenstück der Ellipse erhält man für $t_1 = \frac{1}{2}\pi$, $t_2 = 0$; man findet hierfür $\frac{1}{4}ab\pi$, der Inhalt der ganzen Ellipse ist daher $E = ab\pi$.

3. Den Inhalt der Fläche zu bestimmen, den die Evolute der Ellipse (Fig. 48) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ einschließt.

Für die Evolute der Ellipse besteht nach Teil I, S. 156 die Parameterdarstellung

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t,$$

Fig. 48.

wo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrizität der Ellipse bedeutet. Für das im ersten Quadranten des Koordinatensystems gelegene Flächen-

stück der Evolute, das den vierten Teil der gesamten Fläche F bildet, findet man

$$\frac{1}{4}F = \frac{3c^4}{ab}\int\limits_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t\, dt = \frac{3c^4}{ab}\int\limits_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (\sin^4 t - \sin^6 t)\, dt$$

oder nach Aufg. 76, S. 99 [1]):

$$\frac{1}{4}F = \frac{3c^4}{ab}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\,.\,1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3c^4\pi}{32ab}, \quad F = \frac{3c^4\pi}{8ab},$$

der ganze Inhalt F beträgt daher drei Achtel des Inhalts eines Kreises vom Radius $c^2 : \sqrt{ab}$.

Fig. 49.

4. Wie groß sind die Inhalte der beiden Sektoren, die entstehen, wenn man die Punkte P_1, P_2 der Ellipse in Aufg. 2 durch Radienvektoren mit dem Mittelpunkt O der Kurve verbindet?

Für den Sektor $P_1OP_2KP_1$ (vgl. Fig. 49) findet man nach (5) in Regel **3**:

$$S_1 = \frac{ab}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt = \frac{ab}{2}(t_2 - t_1),$$

für den Sektor $P_2LP_1OP_2$:

$$S_2 = \frac{ab}{2}\int\limits_{t_2}^{2\pi + t_1} dt = \frac{ab}{2}(2\pi + t_1 - t_2).$$

5. Den Inhalt J des kleineren Segments zu bestimmen, das durch die Gerade $5x + 3y - 14 = 0$ von der Ellipse

$$\frac{x^2}{28} + \frac{3y^2}{28} - 1 = 0$$

abgeschnitten wird (Fig. 50).

Fig. 50.

Die Schnittpunkte P_1, P_2 der Geraden mit der Kurve haben die Koordinaten $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ bzw. $x_2 = 4$, $y_2 = -2$, wie man leicht aus den Gleichungen der Geraden und der Ellipse findet. Die zu P_1 und P_2 gehörigen Parameter t_1, t_2 erhält man mit Hilfe von $x = +\sqrt{28}\cos t$, $y = +\sqrt{\frac{28}{3}}\sin t$, und zwar wird $\sphericalangle\, t_1 = 79^0\, 6'\, 24''$, $\sphericalangle\, t_2 = -40^0\, 53'\, 40''$ oder in Bogenmaß $t_1 = 1{,}38068$, $t_2 = -0{,}71374$.

1) Der im *ersten* Quadranten des Koordinatensystems gelegene Evolutenbogen gehört zu dem im vierten Quadranten gelegenen Ellipsenbogen; die Integrationsgrenzen sind daher zunächst $\frac{3}{2}\pi$ und 2π, lassen sich aber durch 0 und $\frac{1}{2}\pi$ ersetzen, wie man leicht einsieht.

Der Inhalt J des Segments ist, wie die Figur zeigt, gleich der Differenz der Inhalte des Sektors $P_1 O P_2 A P_1$ und des Dreiecks $P_1 O P_2 P_1$. Für den Sektor findet man nach Aufg. 4:

$$S = \frac{28}{2\sqrt{3}} \int_{t_2}^{t_1} dt = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot 2{,}09442 = 16{,}929.$$

Das Dreieck $P_1 O P_2 P_1$ ist aus den beiden Dreiecken $O Q P_1$ und $O P_2 Q$ zusammengesetzt, die die Grundlinie $O Q = \frac{14}{5}$ gemeinsam haben, während ihre Höhen mit den absoluten Werten der Ordinaten von P_1 und P_2 übereinstimmen. Daher wird

$$J = 16{,}929 - \tfrac{14}{5}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{2}\right) = 9{,}929.$$

6. Den Flächeninhalt der Ellipse

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

zu berechnen; dabei ist zu beachten, daß diese Gleichung, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, nur dann eine reelle Ellipse darstellt, wenn $AC - B^2 > 0$ ist und die Koeffizienten A und C, die infolge der soeben angeschriebenen Ungleichung Zahlen von gleichem Vorzeichen sein müssen, beide positiv sind. Die Aufgabe soll durch Einführung von Polarkoordinaten vermöge der Gleichungen $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ gelöst werden.[1])

Die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten ist

$$(1) \qquad r^2 = \frac{1}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta};$$

der Flächeninhalt der Kurve wird daher nach Regel **4**:

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta}.$$

Dieses Integral kann nun in die Summe $J_1 + J_2$ zweier anderen zerlegt werden, von denen das eine J_1 die Grenzen 0 und π, das andere J_2 die Grenzen π und 2π hat; der Wert J_2 ist aber gleich J_1, wie sich leicht zeigen läßt, wenn man in J_2 die Veränderliche ϑ durch $\vartheta + \pi$ ersetzt. Daher wird

$$(2) \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta}.$$

1) Vgl. zu dieser Aufgabe Ch. Hermite, Cours professé, rédigé par Andoyer, 3. Aufl., Paris 1887, S. 14—15; Cours d'analyse, Bd. 1, Paris 1873, S. 394—396.

Integrale solcher rationalen Funktionen von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$, die sich nicht ändern, wenn man ϑ durch $\vartheta + \pi$ ersetzt, wurden schon in Aufg. 25, S. 117 betrachtet, und es wurde dort gezeigt, daß der Integrand bei diesen Integralen durch die Substitution $\operatorname{tg}\vartheta = z$ in eine rationale Funktion von z übergeht. Im vorliegenden Falle ergibt sich

$$J = \int \frac{dz}{A + 2Bz + Cz^2}. \tag{3}$$

Die den früheren Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ entsprechenden neuen Grenzen sind nun beide $z = 0$ und man könnte daher glauben, der Wert des Integrals sei Null. Diese Folgerung ist aber falsch: man muß beachten, daß die Funktion $z = \operatorname{tg}\vartheta$ an der Stelle $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ unstetig wird, denn hier springt z vom Werte $+\infty$ über zum Werte $-\infty$; man hat daher das Integral (2) in die Summe zweier anderen zu zerlegen, von denen das eine die Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, das andere die Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und π hat. Nun ist aber

Fig. 51.

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{d\vartheta}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta},$$

wie sich leicht ergibt, wenn man in dem Integral der linken Seite dieser Gleichung ϑ durch $\vartheta + \pi$ ersetzt; daher wird

$$J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\vartheta}{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{A + 2Bz + Cz^2}.$$

Nun wird $z = \operatorname{tg}\vartheta$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht mehr unstetig. Nach Aufg. 4, S. 113 erhält man

$$J = \frac{1}{+\sqrt{AC - B^2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{Cz + B}{\sqrt{AC - B^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{+\sqrt{AC - B^2}}.$$

7. Den Sektor $OAPO = S$ der gleichseitigen Hyperbel

$$x = \operatorname{Cof} t, \quad y = \operatorname{Sin} t$$

zu berechnen. Dabei sei A derjenige *Scheitel* der Kurve, der mit P auf demselben Zweig liegt (Fig. 51). Man findet $S = \frac{1}{2}t$.

Hieraus ergibt sich eine einfache geometrische Bedeutung des Parameters t, er ist doppelt so groß wie der Inhalt des Sektors $OAPO$ der gleichseitigen Hyperbel oder so groß wie der Sektor $OQAPO$, wo Q der Symmetriepunkt von P in bezug auf die Achse OA ist.

Ähnlich wie man die Umkehrung der Gleichungen $x = \cos t$, $y = \sin t$ in der Gestalt

$$t = \operatorname{arc} \cos x, \quad t = \operatorname{arc} \sin y$$

schreibt, stellen

$$t = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, x, \quad t = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, y$$

die Umkehrungen von $OM = x = \mathfrak{Cos}\, t$, $MP = y = \mathfrak{Sin}\, t$ dar; dabei bedeutet $\mathfrak{Ar}$ die Abkürzung des lateinischen Wortes area, auf deutsch Flächeninhalt. Vgl. auch S. 143f.

Übrigens läßt sich t auch leicht durch x und y ausdrücken. Mit Rücksicht auf $e^t = \mathfrak{Cos}\, t + \mathfrak{Sin}\, t = x + y$ wird

$$t = \ln(x + y) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Man beachte überdies, daß außer den Werten von $\mathfrak{Cos}\, t$ und $\mathfrak{Sin}\, t$ auch $\mathfrak{Tg}\, t = \mathfrak{Sin}\, t : \mathfrak{Cos}\, t$ in der Figur durch eine Strecke dargestellt wird[1]), denn bei Einführung des Schnittpunktes S der Scheiteltangente und des Radiusvektors OP hat man $AS : OA = MP : OM$ oder (wegen $OA = 1$)

$$AS = \mathfrak{Sin}\, t : \mathfrak{Cos}\, t = \mathfrak{Tg}\, t.$$

8. Den Inhalt der von der *Lemniskate* $r^2 = 2c^2 \cos 2\vartheta$ (vgl. Teil I, S. 54) umschlossenen Fläche zu bestimmen.

Der Inhalt des im ersten Quadranten des Koordinatensystems gelegenen vierten Teiles der ganzen Fläche ist nach Regel **4**, S. 246:

$$\tfrac{1}{4} J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} c^2 \cos 2\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2} c^2,$$

der Inhalt J der ganzen Lemniskate wird daher $2c^2$.

9. Den Inhalt der Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$$

zu bestimmen, die die *Fußpunktkurve der Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit Bezug auf den Mittelpunkt als Pol darstellt (vgl. Teil I, S. 62).

Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten ist

$$r^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta,$$

---

1) Näheres über die geometrische Deutung der hyperbolischen Funktionen und ihrer Umkehrungen findet man bei H. Wiener, Geometrische Ableitung der Additionssätze für die Hyperbelfunktionen, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 17, (1911), S. 25—30 [1910].

daher wird

$$J = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\pi.$$

10. Den Flächeninhalt J der Kurve

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

zu bestimmen, wo m und n entweder positive *gerade ganze* Zahlen sind oder positive Brüche mit geraden Zählern und ungeraden Nennern. Erfüllen die Exponenten m und n diese Bedingung, so stellt die Gleichung (1) eine zu beiden Koordinatenachsen symmetrische geschlossene Kurve

Fig. 52.

Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

dar, die ganz innerhalb des durch die vier Geraden $x = +a$, $x = -a$, $y = +b$, $y = -b$ gebildeten Rechtecks liegt. Insbesondere im Falle $m < 1$, $n < 1$ liegt sie innerhalb des Rhombus, der entsteht, wenn man die Mitten der Seiten dieses Rechtecks durch Geraden verbindet. Die Figuren 52—55 entsprechen der Reihe nach den Kurven mit den Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{y}{1}\right)^4 = 1; \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{1}\right)^{\frac{4}{5}} = 1; \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{y}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1; \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{1}\right)^4 = 1;$$

hier ist der Reihe nach $m > 1$, $n > 1$, dann $m < 1$, $n < 1$; ferner $m > 1$, $n < 1$; endlich $m < 1$, $n > 1$.

Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Kurve ist das im ersten Quadranten des Koordinatensystems gelegene Flächenstück gleich dem vierten Teil $\frac{1}{4}J$ der Gesamtfläche. Die Gleichungen

$$(2) \qquad x = a\cos^{\frac{2}{m}} t, \quad y = b\sin^{\frac{2}{n}} t$$

stellen die Koordinaten eines Kurvenpunktes als Funktionen eines Parameters t dar und man hat alsdann nach Regel **2**, S. 246

$$(3)\ \frac{1}{4} J = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} b \sin^{\frac{2}{n}} t \cdot \frac{2a}{m} \cos^{\frac{2}{m}-1} t \cdot \sin t \, dt = \frac{2ab}{m} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\frac{2}{n}+1} t \cdot \cos^{\frac{2}{m}-1} t \cdot dt.$$

Nach Aufg. 10, S. 243 ist nun

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

wo p und q positiv sein müssen. Im vorliegenden Falle hat man

$$2p - 1 = \frac{2}{n} + 1, \quad 2q - 1 = \frac{2}{m} - 1, \quad \text{daher} \quad p = \frac{1}{n} + 1, \quad q = \frac{1}{m};$$

es folgt somit

$$(4) \qquad \frac{1}{4} J = \frac{ab}{m} \mathrm{B}\left(\frac{1}{n} + 1,\ \frac{1}{m}\right) = \frac{ab}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right)}.$$

Diese Formel wird symmetrisch, wenn man beachtet, daß nach Aufg. 4, S. 240

$$\frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

ist; alsdann ergibt sich

$$J = 4ab \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{4ab}{mn} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

oder

$$J = \frac{4ab}{m+n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4ab}{m+n} \mathrm{B}\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right).$$

Die Kurven (1) sind für die Forstwissenschaft von Wichtigkeit. O. Simony in Wien hat nämlich darauf hingewiesen[1]), daß die horizontalen Schnittflächen zahlreicher Baumstämme angenähert von Kurven dieser Art begrenzt werden, und wenn dies auch nicht für *jede* horizontale Schnittfläche eines beliebig gewählten Baumes zutrifft, so läßt sich doch für Bäume gleicher Art, gleichen Alters, gleicher Höhe und gleicher mittlerer Stärke eine *mittlere Stammform* angeben. Eine einiger-

---

1) Zentralblatt für das gesamte Forstwesen, 3. Jahrgang, Heft 6, Juni 1877. In dieser Abhandlung werden auch die vorhin erwähnten Typen der Kurven (1) näher untersucht.

maßen regelmäßig begrenzte Schnittfläche zeigt sich allerdings meistens erst über den Wurzelanläufen und nicht bei den stärker beasteten Stammteilen.

Simony zeigt ferner, wie man die Gleichung der Mantelfläche eines Baumstammes ableiten kann, wenn außer seiner Achsenlänge l die Inhalte von m horizontalen Querschnitten $F_k (k = 1, 2, \ldots m)$ nebst deren Abständen von der Stammspitze S gegeben sind, sowie die Maximalstärke (Länge der größten Sehne) eines jeden Querschnittes F_k und die auf ihn bezogene „*Formzahl*" λ_k, d. h. das Verhältnis des Stammvolumens zu jenem eines Zylinders vom Querschnitt F_k und von der Länge l. Unter der Achse des Stammes versteht hierbei Simony die Gerade, die die Mittelpunkte der Maximalstärken aller horizontalen Schnittflächen verbindet.

11. Den Flächeninhalt eines der n unter sich kongruenten Blätter zu berechnen, aus denen die Sinusspirale

$$r^n = a^n \cos n\vartheta$$

besteht[1]) (vgl. Teil I, S. 54).

Die Hälfte $\frac{1}{2} J$ desjenigen Blattes der Kurve, das die in der Richtung $\vartheta = 0$ verlaufende Polarachse zur Symmetrieachse hat, liegt in dem Winkel zwischen der Polarachse und dem durch den Koordinatenanfang unter einem Winkel $\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\pi}{n}$ gezogenen Strahl. Daher wird

$$\frac{1}{2} J = \int_0^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}} \frac{a^2}{2} \cos^{\frac{2}{n}} n\vartheta \, d\vartheta,$$

und dieses Integral geht mit Hilfe von $n\vartheta = u$ über in

$$\frac{1}{2} J = \frac{a^2}{2n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{2}{n}} u \, du.$$

---

1) Wie man leicht einsieht, ist die Kurve $r^n = a^n \cos n\vartheta$ kongruent mit $r^n = a^n \sin n\vartheta$, denn durch die Substitution $\vartheta = \varphi - \frac{\pi}{2n}$, die eine Drehung um den Winkel $\frac{1}{2n} 180^0$ bedeutet, geht aus $r^n = a^n \cos n\vartheta$ die Gleichung $r^n = a^n \sin n\varphi$ hervor. Diese „*Sinusspiralen*" bestehen aus n kongruenten Blättern, die symmetrisch angeordnet sind. Zieht man nämlich durch den Pol O des Koordinatensystems $2n$ Strahlen, von denen je zwei benachbarte Strahlen einen Winkel von $\frac{360^0}{2n}$ einschließen, so enthält stets der eine von zwei benachbarten Winkeln ein Blatt der Kurve, während im anderen kein Teil der Kurve verläuft.

Nach Aufg. 10, S. 243 ist nun

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{2}{n}} u\, du = +\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

oder nach Aufg. 4, S. 240 gleich

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)},$$

daher folgt

$$J = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Für ein Blatt der *Lemniskate* $r^2 = a^2\cos 2\vartheta$ findet man hiernach

$$J = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

oder mit Rücksicht auf $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = +\sqrt{\pi}$ (vgl. Regel **3**, S. 239 und Aufg. 8, S. 242):

$$J = \tfrac{1}{2}a^2$$

in Übereinstimmung mit Aufg. 8, S. 251, wenn man beachtet, daß $a^2 = 2c^2$ ist und jetzt J den Inhalt *eines* Blattes, also der Hälfte der ganzen Lemniskate bezeichnet.

§ 16.

Mittelwertsätze. Mittelwert einer Funktion in einem gewissen Intervalle.

1. *Erster Mittelwertsatz.* Sind die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervalle von a bis b eindeutig, endlich und stetig und haben die Werte von $f(x)$ in diesem Intervalle sämtlich dasselbe Vorzeichen, so gilt die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx,$$

wobei ξ zwischen a und b gelegen ist und $a < b$ oder $a > b$ ist.

2. *Zweiter Mittelwertsatz.* Wenn die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervalle von a bis b eindeutig, endlich und stetig sind und wenn

$\varphi(x)$ daselbst *monoton* ist, d. h. in diesem Intervalle entweder nicht zunimmt oder nicht abnimmt, so gilt die Gleichung

$$J = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx,$$

wobei $a < \xi < b$ ist.

3. Unter dem *Mittelwert* der eindeutigen, endlichen und stetigen Funktion $y = \varphi(x)$ für das Intervall von a bis $b > a$ versteht man den Ausdruck

$$y_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Diese Formel ergibt sich als spezieller Fall von Regel **1**, wenn man dort $f(x) = 1$ setzt; $\varphi(\xi)$ ist alsdann der Mittelwert y_m. Geometrisch gedeutet sagt die mit $b - a$ multiplizierte Formel aus, daß der Flächeninhalt der Kurve $y = \varphi(x)$ für das Intervall von a bis b gleich dem Inhalt eines Rechtecks ist, das zur einen Seite die Strecke $b - a$ hat, über der das genannte Flächenstück der Kurve liegt, während die Länge der anderen Seite gleich dem Mittelwert y_m der zu dem Intervall von a bis b gehörigen Ordinaten ist.

Man kann die Formel auch in der Gestalt

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi(a + \vartheta(b-a))$$

schreiben, wo ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet.

4. Wird in der Formel für den zweiten Mittelwertsatz $f(x) = 1$ gesetzt, so folgt: Unter den in Regel **2** angegebenen Bedingungen für die Funktion $\varphi(x)$ besteht die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (\xi - a)\,\varphi(a) + (b - \xi)\,\varphi(b).$$

5. Sind in dem ganzen Intervalle von a bis $b > a$ die Werte der Funktion $\varphi(x)$ stets kleiner als die Werte der Funktion $\psi(x)$, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Die vorstehenden Regeln lassen sich benutzen um Zahlenwerte zu finden, zwischen denen der Wert eines bestimmten Integrals gelegen ist.

Beispiele.

1. Den mittleren Wert der Funktion $y = \sin(ax)$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi : a$ zu bestimmen.

Nach Regel **3** ist

$$y_m = \frac{a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)\,dx = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366,$$

somit von a unabhängig.

2. Auf einer Strecke AB von der Länge a wird im Abstand x vom Endpunkt A ein Punkt P angenommen. Es ist zu zeigen, daß der Inhalt der aus den Teilen AP und PB als Seiten konstruierten Rechtecke im Mittel gleich $\frac{1}{6}a^2$ ist.

Hier wird

$$J_m = \frac{1}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{1}{6}a^2.$$

3. Welche Zahl m ist der mittlere Wert der reziproken Werte aller positiven Zahlen von a bis b und was ergibt sich insbesondere im Falle $b = 2a$?

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}\cdot$$

Im Falle $b = 2a$ erhält man $m = \frac{1}{a}\ln 2 = \frac{1}{a}\cdot 0{,}69315$.

4. Wenn ein im luftleeren Raum in der Nähe der Erdoberfläche befindlicher Körper von der Ruhelage aus längs einer Strecke $s = s_1$ gefallen ist, so hat er bekanntlich die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gs_1}$ erlangt, wobei $g = 9{,}81$ m/sek² die Beschleunigung der Schwere bezeichnet. Man soll zeigen, daß die diesem Fall entsprechende mittlere Geschwindigkeit v_m gleich $\frac{2}{3}v_1$ ist.

$$v_m = \frac{1}{s_1}\int_0^{s_1}\sqrt{2gs}\,ds = \frac{2}{3}\sqrt{2gs_1} = \frac{2}{3}v_1.$$

In ihrer Abhängigkeit von der zugehörigen Fallzeit t_1 ist die mittlere Geschwindigkeit v_μ gleich der *halben* Endgeschwindigkeit $v_1 = gt_1$, denn hier ist

$$v_\mu = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} g\,t\,dt = \frac{1}{2}gt_1 = \frac{1}{2}v_1.$$

5. Die mittlere Länge y_m aller positiven Ordinaten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bestimmen.

Zur Berechnung von

$$y_m = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

setze man $x = a \cos \vartheta$. Alsdann folgt

$$y_m = -\frac{b}{2a^2}\int_{\pi}^{0} a^2 \sin^2 \vartheta\, d\vartheta = \frac{b}{2}\left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \frac{1}{4} b\pi = 0{,}7854\, b.$$

Vgl. hierzu Aufg. 42, S. 85 und Aufg. 17, S. 192.

6. Den mittleren Abstand r_m eines auf der Peripherie eines Kreises vom Radius a beliebig aber fest gewählten Punktes O von den übrigen Punkten der Kreisperipherie zu bestimmen.

Fig. 56.

Wählt man den Punkt O als Pol eines Systems von Polarkoordinaten, die Tangente von O als Polarachse (Fig. 56), so hat der Kreis in Polarkoordinaten die Gleichung $r = 2a \sin \vartheta$, daher wird

$$r_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2a \sin \vartheta\, d\vartheta = \frac{4a}{\pi} = 1{,}2732\, a.$$

7. Vom einen Brennpunkt einer Ellipse werden nach allen oberhalb der großen Achse $2a$ gelegenen Kurvenpunkten Strahlen gezogen; es ist zu zeigen, daß die mittlere Länge r_m aller dieser Brennstrahlen gleich der halben kleinen Achse b der Ellipse ist. Beim Nachweis dieser Behauptung soll von der Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$r = \frac{p}{2(1 - \varepsilon \cos \vartheta)}$$

ausgegangen werden, in der $\frac{1}{2}p = b^2 : a$ ist und ε die numerische Exzentrizität $\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ bedeutet.

Unter Benutzung des Ergebnisses von Aufg. 17, S. 115 findet man

$$r_m = \frac{p}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{p}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{\pi}{2} = \frac{p}{2} : \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

woraus mit Hilfe von $1 - \varepsilon^2 = b^2 : a^2$, $\frac{1}{2}p = b^2 : a$ sofort $r_m = b$ hervorgeht.

8. Es ist zu zeigen, daß die mittlere Länge ϱ_m des Krümmungsradius der gemeinen Zykloide (vgl. Teil I, S. 47 und 98)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

für das Intervall von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ gleich $8a : \pi$ ist.

Für die Länge ϱ des Krümmungsradius, der dem Punkt P einer durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebenen Kurve zugehört, gilt bekanntlich (vgl. Teil I, S. 153) die Formel:

$$\varrho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''},$$

wo durch die Akzente bei φ und ψ die nach dem Parameter t des Punktes P genommenen Ableitungen der Funktionen φ und ψ angedeutet sind. Für den absoluten Wert von ϱ findet man beim vorliegenden Beispiel

$$|\varrho| = 4a\,|\sin\tfrac{1}{2}t|;$$

daher wird

$$\varrho_m = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} 4a \sin\frac{1}{2}t\,dt = \frac{8a}{\pi}\cdot$$

9. In einem gewöhnlichen (nicht singulären) Punkt P einer konvex gekrümmten Fläche denke man sich die Flächennormale errichtet und durch sie ein Ebenenbüschel gelegt. Die Schnittkurven dieses Büschels und der Fläche (die zu P gehörigen Normalschnitte) haben alsdann entweder in P gleich große und nach derselben Seite gerichtete Krümmungsradien, also gleiche Krümmung, oder — und dies ist der gewöhnliche Fall — die Krümmung im Punkte P ist von Kurve zu Kurve veränderlich. Im ersten Fall ist P ein sogenannter Nabelpunkt der Fläche oder ein Punkt sphärischer Krümmung; im zweiten Fall erreicht die Krümmung von P, wie in der Lehre von der Krümmung der Flächen gezeigt wird, für einen bestimmten Normalschnitt ein Maximum, für einen anderen Normalschnitt ein Minimum, und die Ebenen dieser beiden Schnittkurven sind zueinander rechtwinklig. Man nennt die zugehörigen Krümmungsradien die *Hauptkrümmungsradien* des Flächenpunktes P. Haben diese die Längen R_1 und R_2 und ist ϱ der Krümmungsradius von P in einem anderen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des Hauptnormalschnitts von der Krümmung $1 : R_1$ den Winkel φ bildet, so besteht nach Euler die einfache Beziehung:

$$\varrho = \frac{R_1 R_2}{R_2 \cos^2\varphi + R_1 \sin^2\varphi}\cdot$$

Man soll nun den Mittelwert ϱ_m der Krümmungsradien aller zu P gehörigen Normalschnitte bestimmen.

Man erhält

$$\varrho_m = \frac{R_1 R_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{R_2\cos^2\varphi + R_1\sin^2\varphi} = \frac{R_1 R_2}{2\pi}\cdot 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{R_2\cos^2\varphi + R_1\sin^2\varphi}$$

oder (nach Aufg. 12, S. 107)

$$\varrho_m = \frac{R_1 R_2}{2\pi} \cdot \frac{4}{\sqrt{R_1 R_2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \operatorname{tg} \varphi \right) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

10. Bei dem *Benzin* ist die *spezifische Wärme* c bei konstantem Druck von der Temperatur Θ in Celsiusgraden abhängig auf Grund der Formel[1])

$$c = 0{,}2237 + 0{,}0010228\,\Theta.$$

Wie groß ist hiernach die mittlere spezifische Wärme c_m des Benzins für das Temperaturintervall von $\Theta = 116^0$ C bis $\Theta = 218^0$ C?

$$c_m = \frac{1}{102} \int_{116}^{218} c\, d\Theta = 0{,}3945.$$

11. Bei dem *Schubkurbelgetriebe* wird der eine Endpunkt A (der Kurbelzapfen) einer Strecke von der Länge l (der Schubstange oder Pleuelstange) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreise vom Radius $OA = a$ (a = Kurbellänge) geführt, während der andere Endpunkt B (Kreuzkopf) auf einer durch den Kreismittelpunkt gehenden Geraden hin- und hergleitet (Fig. 57). In dem Augenblick, in dem der Winkel AOB gleich ϑ ist, ist die Geschwindigkeit v, mit der der Kreuzkopf B auf der Geraden OB gleitet, durch die Formel

Fig. 57.

$$v = a\omega \left\{ \sin\vartheta + \frac{k \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} \right\}$$

gegeben (vgl. Teil I, S. 18), in der k den Quotienten $a : l$ bedeutet.

Wie groß ist bei dieser Kurbelbewegung die mittlere Geschwindigkeit v_m des Kreuzkopfes für das Intervall von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$?

$$v_m = \frac{a\omega}{\pi} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta + \frac{a\omega}{\pi} \int_0^\pi \frac{k \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}}\, d\vartheta.$$

Da das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung gleich $\frac{2a\omega}{\pi}$ ist, während das zweite nach Gleichung (5) in Aufg. 4, S. 74 verschwindet, folgt

$$v_m = \frac{2a\omega}{\pi}.$$

1) Vgl. E. Wiedemann in den Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. Wiedemann, neue Folge, Bd. 2 (1877), S. 205.

12. Bei einer *Wechselstrommaschine* ist die *elektromotorische Kraft* E eine periodische Funktion der Zeit t, nämlich $E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, wo T die Zeitdauer einer Periode in Sekunden und E_0 den zu $t = \frac{1}{4} T$ gehörigen Maximalwert der elektromotorischen Kraft, die *Amplitude* bedeutet.[1]) Der Ausdruck $2\pi t : T$ ist die zum Wert E gehörige *Phase.* Es soll nun der zu dem Intervall von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2} T$ gehörige Mittelwert E_m der elektromotorischen Kraft E bestimmt werden sowie der Mittelwert $(E^2)_m$ des Quadrates von E.

Offenbar ist

$$E_m = \frac{2E_0}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} \sin \frac{2\pi t}{T}\, dt = \frac{2}{\pi} E_0 = 0{,}6366\, E_0,$$

$$(E^2)_m = \frac{2}{T} E_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}T} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\, dt$$

$$= \frac{2E_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi t}{T}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}T} = \frac{1}{2} E_0^2.$$

Denselben Wert $\frac{1}{2} E_0^2$ würde man für das Intervall von $t = 0$ bis $t = T$ erhalten haben, da die Funktion $\sin^2 \frac{2\pi t}{T}$ von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2} T$ geradeso verläuft wie von $t = \frac{1}{2} T$ bis $t = T$.

Die Quadratwurzel aus $(E^2)_m$ wird als *wirksame* oder *effektive* elektromotorische Kraft bezeichnet[2]), sie ist $E_0 : \sqrt{2} = 0{,}7071\, E_0$. Die Ausdrücke für $(E^2)_m$ und $\sqrt{(E^2)_m}$ sind wichtig, weil die Angaben der meisten Apparate, die zur Messung periodisch veränderlicher elektromotorischer Kräfte dienen, den genannten Ausdrücken entsprechen.[3])

13. Bei einem *Wechselstrom* ist die *Stromstärke* i eine periodische Funktion der Zeit t auf Grund der Formel

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right),$$

---

1) Hierbei kann T auch aus der sekundlichen *Periodenzahl* oder *Frequenz* ν bestimmt werden: der Anzahl der ganzen Sinuswellen oder Perioden in einer Sekunde; offenbar ist $\nu = 1 : T$, daher $T = 1 : \nu$. In der Starkstromtechnik wird häufig eine Frequenz $\nu = 50$ benutzt, in der Telephonie kommen Frequenzen $\nu = 5000$, in der drahtlosen Telegraphie solche wie $\nu = 100\,000$ oder 150000 vor.

2) Englische Autoren nennen die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrates einer Funktion y „root-mean-square value of y“.

3) Vgl. z. B. F. Niethammer, Elektrotechnisches Praktikum, Stuttgart 1902, S. 80f.

wo T dieselbe Bedeutung hat wie in Aufg. 12, während i_0 das Maximum der Stromstärke bezeichnet. Die Bedeutung von φ ergibt sich aus der zu i gehörigen elektromotorischen Kraft, die durch

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

gegeben sei und ihren größten Betrag für $t = \frac{1}{4} T$ erreicht. Da das Maximum der Stromstärke zu $t = \frac{1}{4} T + \frac{\varphi T}{2\pi}$ gehört, ist die Phase von i gegen die Phase von E um den Betrag $\frac{\varphi T}{2\pi}$ verzögert. Hierbei ist φ abhängig von der Frequenz ν und von den Konstanten des Stromkreises (Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität).[1])

Man soll nun den Mittelwert i_m von i für das Intervall von $\frac{\varphi T}{2\pi}$ bis $\frac{1}{2} T + \frac{\varphi T}{2\pi}$ bestimmen, ebenso den Mittelwert $(i^2)_m$ des Quadrates von i für dasselbe Intervall.

Man findet

$$i_m = \frac{2 i_0}{T} \int\limits_{\frac{\varphi T}{2\pi}}^{\frac{1}{2}T + \frac{\varphi T}{2\pi}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) dt$$

oder nach Einführung von $z = \frac{2\pi t}{T} - \varphi$:

$$i_m = \frac{2 i_0}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin z \, dz = \frac{2 i_0}{\pi} = 0{,}6366\, i_0 .$$

Derselbe Wert hätte sich übrigens auch für das Intervall von $\frac{\varphi T}{2\pi}$ bis $\frac{1}{4} T + \frac{\varphi T}{2\pi}$ ergeben.

Ferner wird

$$(i^2)_m = \frac{2 i_0^2 T}{T \cdot 2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^2 z \, dz = \frac{i_0^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} i_0^2 .$$

Derselbe Wert würde sich für das Intervall von $\frac{\varphi T}{2\pi}$ bis $\frac{1}{4} T + \frac{\varphi T}{2\pi}$ ergeben.

Die Quadratwurzel aus $(i^2)_m$ wird als *effektive* Stromstärke bezeichnet, ihr Verhältnis zum Mittelwert i_m als *Formfaktor*.

1) Näheres findet man z. B. bei E. Kittler, Allgemeine Elektrotechnik, Bd. 2, Einführung in die Wechselstromtechnik. Transformatoren, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Petersen, Stuttgart 1909, S. 27—33.

14. Den Mittelwert der Funktion

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx$$

für das Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ zu bestimmen.

Je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist, findet man

$$y_m = \frac{1}{\pi}\left(2a_1 + \frac{2}{3}a_3 + \frac{2}{5}a_5 + \cdots + \frac{2}{n}a_n\right) + \frac{1}{2}b_0,$$

bzw.

$$y_m = \frac{1}{\pi}\left(2a_1 + \frac{2}{3}a_3 + \frac{2}{5}a_5 + \cdots + \frac{2}{n-1}a_{n-1}\right) + \frac{1}{2}b_0.$$

15. Die Stromstärke eines Wechselstroms sei durch die Formel

$$i = a_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + a_2 \sin\frac{4\pi t}{T} + \cdots + a_n \sin\frac{2n\pi t}{T} + b_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + b_2 \cos\frac{4\pi t}{T} + \cdots + b_n \cos\frac{2n\pi t}{T}$$

gegeben. Wie groß ist die *effektive Stromstärke* (vgl. Aufg. 13) für das Intervall von $t = 0$ bis $t = T$?

Zunächst wird

$$(i^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ \sum_1^n {}^k a_k^2 \sin^2\frac{2k\pi t}{T} + \sum_1^n {}^k b_k^2 \cos^2\frac{2k\pi t}{T}\right\} dt,$$

denn das über die Summe der doppelten Produkte der einzelnen Glieder von i^2 erstreckte Integral ist gleich Null, wie sich bei Einführung einer neuen Veränderlichen z durch $\frac{2\pi t}{T} = z$ mit Hilfe der Formeln in den Aufgaben 62—64, S. 95 sofort ergibt. Man erhält

$$(i^2)_m = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2),$$

die effektive Stromstärke wird daher

$$\sqrt{(i^2)_m} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

16. Wie schon in Teil I, S. 117 erwähnt wurde, kann man nach Messungen, die R. Jasmund an verschiedenen Stellen der Elbe vornahm, die Art, wie sich die Geschwindigkeit y der Wasserteilchen des Flusses längs einer und derselben Vertikalen mit der Höhe x über der Flußsohle ändert, durch die Formel

(1) $$y = a + b\log(x + c) = a + bM\ln(x + c)$$

darstellen.[1]) Hier sind a, b, c und M Konstanten, und zwar hängt a hauptsächlich von der Größe des Gefälles, der Wassertiefe und dem Abstand der Vertikalen vom Flußufer ab; b ist im wesentlichen nur vom Gefälle abhängig, c bezeichnet den Abstand der Asymptote $x + c = 0$ der Kurve (1) von der in der Flußsohle liegenden y-Achse (Fig. 58); M ist der Modul 0,43429 des Briggsschen Logarithmensystems. Bei einer anderen Vertikalen haben a, b und c natürlich andere Werte. Um zu zeigen, welche Größenordnung sie haben, geben wir ein Beispiel, das dem Mittelwert mehrerer von Jasmund in der Nähe Magdeburgs an derselben Vertikale bei verschieden hohem Wasserstand ausgeführten Messungen entspricht, nämlich (Fig. 58)

Fig. 58.

$$(2) \qquad y = 1{,}0669 + 0{,}5804 \log (x + 0{,}2136)$$

und zwar sind die hier auftretenden Längen in Metern angegeben, so daß z. B. in der Höhe $x = (1 - c)$ m über der Flußsohle die Geschwindigkeit 1,0669 m/sek beträgt. Es werde hierbei bemerkt, daß die Formel (1) in nächster Nähe der Flußsohle nicht mehr gilt; es wurden die zahlreichen Messungen erst in 0,15 m Höhe über der Flußsohle begonnen. Auch wurden die in der Nähe des Ufers vorgenommenen Messungen nicht berücksichtigt, um den Einfluß steiler Ufer, die auf das Wasser eine verzögernde Wirkung ausüben, möglichst zu eliminieren.

Die Geschwindigkeit an der Oberfläche sei $y = y_0$, während in der Höhe $x_1 + c = \delta$ über der Asymptote $x + c = 0$ die Geschwindigkeit Null stattfinden möge, wobei $\log \delta = - a : b$ ist.

Man soll nun zeigen, daß für die mittlere Geschwindigkeit y_m die Formel gilt

$$(3) \qquad y_m = \frac{y_0 T}{T - \delta} - bM,$$

wo T den Abstand des Wasserspiegels von der Asymptote $x + c = 0$ bedeutet. Hierfür kann auch

$$(4) \qquad y_m = y_0 - bM$$

gesetzt werden, da T und $T - \delta$ nahezu gleich groß sind.

Man findet zunächst

$$y_m = \frac{1}{T - \delta} \int_{\delta - c}^{T - c} \{a + bM \ln (x + c)\}\, dx$$

1) Zeitschrift für Bauwesen, 43. Jahrgang (1893), S. 137. Vgl. ferner das Kapitel „Fließende Gewässer" von Jasmund im „Handbuch der Ingenieurwissenschaften", 3. Teil „Der Wasserbau", 1. Bd. „Die Gewässerkunde", 4. Aufl., Leipzig 1911, S. 465.

oder nach Aufg. 6, S. 66

$$y_m = \frac{1}{T-\delta}\left\{a(T-\delta) + bM\left[(x+c)\{\ln(x+c)-1\}\right]_{x+c=\delta}^{x+c=T}\right\}$$

$$= \frac{1}{T-\delta}\{aT - a\delta + bMT\ln T - bMT - bM\delta\ln\delta + bM\delta\}.$$

Da nun $a + bM\ln T = y_0$ und $a + bM\ln\delta = 0$ ist, folgt

$$(5) \qquad y_m = \frac{y_0 T - bM(T-\delta)}{T-\delta} = \frac{y_0 T}{T-\delta} - bM,$$

wofür, wie schon erwähnt wurde, mit hinreichender Genauigkeit $y_0 - bM$ gesetzt werden kann.

Diese mittlere Geschwindigkeit findet in einer Höhe ξ über der Asymptote $x + c = 0$ statt, die aus $y_0 - bM = a + bM\ln\xi$ zu bestimmen ist. Man erhält

$$\ln\xi = \frac{y_0 - a - bM}{bM} = \frac{bM(\ln T - 1)}{bM} = \ln\frac{T}{e},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen 2,71828 bedeutet. Daher folgt

$$(6) \qquad \xi = \frac{T}{e} = \frac{T}{2{,}718} = 0{,}368\,T,$$

d. h. in der Tiefe $0{,}632\,T$ unter dem Wasserspiegel haben die Wasserteilchen diese mittlere Geschwindigkeit.[1])

17. Die in Aufg. 16 auftretende Formel (1) ist durch

$$(7) \qquad y = a + bM\ln x + kM\ln(t-x)$$

zu ersetzen, wenn sich auf dem Flusse eine stehende Eisdecke befindet. Hierbei sind a, b und k Konstanten, und zwar hängen b und k von der Rauhigkeit des Bodens bzw. der Eisdecke ab; t ist die Flußtiefe an der betreffenden Stelle. Bei einem gewissen Lot in der Nähe von Magdeburg war z. B.[2])

$$(8) \qquad y = 0{,}4561 + 0{,}2292\log x + 0{,}1146\log(2{,}68 - x).$$

Es soll nun für (7) die mittlere Geschwindigkeit y_m bestimmt werden.[3])

---

1) Vgl. R. Jasmund, Zeitschrift für Bauwesen, 43. Jahrgang (1893), S. 147 f.; im Handbuch der Ingenieurwissenschaften a. a. O. S. 474.

2) R. Jasmund, Zeitschrift für Bauwesen, 47. Jahrgang (1897), S. 589.

3) R. Jasmund, Zeitschrift für Bauwesen, 47. Jahrgang (1897), S. 470—472.

Man findet

$$y_m = \frac{1}{t} \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}} \int_{0+\delta}^{t-\varepsilon} \{a + bM \ln x + kM \ln(t-x)\}\, dx$$

$$= \frac{1}{t}\{at + bMt(\ln t - 1) + kMt(\ln t - 1)\} = a + (b+k)M \ln \frac{t}{e};$$

hierbei wurde die Tatsache benutzt, daß $\lim\limits_{t=0}\{t \cdot \ln t\} = 0$ ist.

Diese mittlere Geschwindigkeit findet in einer Höhe ξ über der Flußsohle statt, die aus der Gleichung

$$a + (b+k)M \ln \frac{t}{e} = a + bM \ln \xi + kM \ln(t-\xi)$$

zu bestimmen ist. Diese kann auch in der Form

$$\left(\frac{t}{e}\right)^{b+k} = \xi^b (t-\xi)^k$$

geschrieben werden. Bei Einführung von $k:b = m$ folgt

$$\xi (t-\xi)^m = \left(\frac{t}{e}\right)^{m+1},$$

woraus hervorgeht, daß ξ nicht von b und k einzeln, sondern von dem *Verhältnis* $b:k$ abhängt.

18. Mit Benutzung von Regel **5** und mit Rücksicht auf die für $x^2 \leqq 1$ bestehende Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist zu zeigen, daß der Wert des Integrals

$$J = \int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

zwischen 0,4 und 0,41152 liegt.

Offenbar ist

$$\int_0^{0,4} dx < \int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

daher $0,4 < J < \arcsin 0,4$. Der zu $\arcsin 0,4 = \alpha$ gehörige Winkel ist aus $\sin\alpha = 0,4$ zu bestimmen und wird gleich $23^0\,34'\,42''$ gefunden; die zugehörige Bogenlänge kann einer die Länge der Kreisbogen für den Kreis vom Halbmesser 1 enthaltenden Tafel entnommen werden, sie ist 0,41152.

19. Mit Benutzung von Regel **5** und mit Rücksicht auf die für $x^2 \leqq 1$ gültige Ungleichung $1 \geqq \cos x \geqq 1 - \frac{1}{2} x^2$ (vgl. Teil I, S. 80) soll man zeigen, daß der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{\cos x}\, dx$$

zwischen 1 und 0,9089 gelegen ist.

Offenbar ist

$$\int_0^1 dx > \int_0^1 \sqrt{\cos x}\, dx > \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\, dx,$$

wobei das letzte Integral in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{2 - x^2}\, dx$$

geschrieben werden kann und nach Aufg. 17, S. 192 den Wert hat

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x}{2} \sqrt{2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$
$$= 0{,}7071 \cdot 1{,}2854 = 0{,}9089.$$

20. Man soll sich mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes (Regel **1**) überzeugen, daß für die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung (Regel **5** und **6**, S. 209f.)

$$F(k, u) = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \qquad (k^2 < 1,\ u^2 < 1)$$

eine Gleichung von der Form

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \xi^2}} \arcsin u, \qquad 0 < \xi < u$$

stattfindet. Auch folgt leicht

$$\arcsin u < F(k, u) < \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \arcsin u.$$

§ 17.

Berechnung der Bogenlänge von Kurven (Rektifikation).

1. Die Länge s des sich vom Punkte P_1 bis zum Punkte P_2 erstreckenden *Bogens* der bei rechtwinkligen Koordinaten durch die Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

bestimmten ebenen Kurve ist durch die Formel

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \tag{2}$$

gegeben, in der t_1 und t_2 die Parameter der Endpunkte P_1 und P_2 des Kurvenbogens bedeuten. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ und ihre ersten Ableitungen in dem Intervall von t_1 bis t_2 eindeutige und stetige Funktionen von t sind; ferner wird angenommen, daß jedem zwischen P_1 und P_2 gelegenen Punkte der Kurve nur ein Parameterwert t zugeordnet ist. Wird die Kurve im Sinne der wachsenden Werte von t durchlaufen, so soll auch die Bogenlänge als wachsend angesehen werden; man hat alsdann die Quadratwurzel in (2) positiv zu wählen.

2. Die Länge s des sich vom Punkte P_1 bis zum Punkte P_2 erstreckenden Bogens der in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

$$y = f(x) \tag{3}$$

gegebenen Kurve ist

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{4}$$

Hierbei sind x_1 und x_2 die Abszissen der Punkte P_1 und P_2. Für die Funktion $f(x)$ und das Vorzeichen der Quadratwurzel gelten entsprechende Voraussetzungen wie in Regel **1** für die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$.

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, bei der Integration nicht x sondern y als unabhängige Veränderliche zu benutzen; die Formel (4) ist alsdann durch

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{5}$$

zu ersetzen; dabei sind y_1 und y_2 die Ordinaten von P_1 und P_2.

3. Die Bogenlänge s der durch die Gleichung in Polarkoordinaten

$$r = f(\vartheta) \tag{6}$$

bestimmten ebenen Kurve ist durch

$$(7) \qquad s = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta$$

gegeben; dabei sind ϑ_1 und ϑ_2 die zu den Endpunkten P_1 und P_2 des Bogens gehörigen Polarwinkel. Für die Funktion $f(\vartheta)$ gelten entsprechende Voraussetzungen wie in Regel **1** für die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$; die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, wenn die Kurve im Sinne der wachsenden Werte von ϑ durchlaufen wird.

4. Die Bogenlänge s der bei rechtwinkligen Koordinaten durch

$$(8) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

bestimmten *Raumkurve* ist durch

$$(9) \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \chi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

gegeben. Für die Funktionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ gelten entsprechende Voraussetzungen wie in Regel **1**.

5. Die in Regel **1** bis **3** angegebenen Formeln für die Bogenlänge s lassen sich in der allgemeinen Formel

$$(10) \qquad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

zusammenfassen, die Gleichung (9) läßt sich durch

$$(11) \qquad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ersetzen.

Beispiele.

In den folgenden Beispielen ist, wenn nicht etwas anderes besonders bemerkt wird, stets die Länge des sich vom Punkte P_1 bis zum Punkte P_2 erstreckenden Bogens der betreffenden Kurve zu bestimmen. Dabei sind t_1 und t_2 die Parameter, x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 die rechtwinkligen Koordinaten, r_1, ϑ_1 bzw. r_2, ϑ_2 die Polarkoordinaten der Endpunkte des Bogens.

1. Die Bogenlänge der *gemeinen Zykloide* (vgl. Teil I, S. 47 und 98)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

zu bestimmen, also jener Kurve, die von einem Punkte der Peripherie eines Kreises vom Radius a beschrieben wird, wenn dieser Kreis auf einer Geraden (x-Achse) rollt ohne zu gleiten.

Hier wird

$$s = a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a\int_{t_1}^{t_2} \sin\frac{t}{2}\,dt,$$

somit

$$s = 4a\left(\cos\tfrac{1}{2}t_1 - \cos\tfrac{1}{2}t_2\right).$$

Insbesondere für $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, also für *die Länge des Zykloidenbogens, der einem einmaligen Abrollen des die Zykloide erzeugenden Kreises entspricht, ergibt sich der einfache Ausdruck*

$$S = 8a.$$

2. Die Bogenlänge der *Epizykloide* zu bestimmen, also jener Kurve, die von einem Punkt P der Peripherie eines Kreises vom Radius b beschrieben wird, wenn dieser auf der Außenseite eines festen Kreises vom Radius a ohne Gleiten rollt. Berühren sich beide Kreise zu Anfang der Bewegung an der Stelle $x = a$ der x-Achse und hat alsdann P die Koordinaten $x = a + 2b$, $y = 0$, so ist die Epizykloide durch die Parameterdarstellung

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (a+b)\cos t + b\cos\dfrac{a+b}{b}t = \varphi(t), \\ y = (a+b)\sin t + b\sin\dfrac{a+b}{b}t = \psi(t) \end{cases}$$

gegeben, in der t den Winkel bezeichnet, den der nach dem jeweiligen Berührungspunkt der beiden Kreise gezogene Radiusvektor mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Man findet

$$s = (a+b)\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2\left(1+\cos\frac{at}{b}\right)}\,dt = 2(a+b)\int_{t_1}^{t_2} \cos\frac{at}{2b}\,dt,$$

somit

$$(2) \qquad s = \frac{4b(a+b)}{a}\left(\sin\frac{at_2}{2b} - \sin\frac{at_1}{2b}\right).$$

Hier ist $\dfrac{at}{b} = u$ der Winkel, um den sich der rollende Kreis seit Beginn der Bewegung gedreht hat.

Will man die halbe Länge $\frac{1}{2}S$ des einem einmaligen Abrollen des beweglichen Kreises entsprechenden Kurvenbogens haben, so ist der Bogen $u_1 = \dfrac{at_1}{b} = 0$, der Bogen $u_2 = \dfrac{at_2}{b} = \pi$ zu setzen; aus (2) folgt alsdann

$$(3) \qquad \frac{1}{2}S = \frac{4b(a+b)}{a} \quad \text{und} \quad S = \frac{8b(a+b)}{a}.$$

Rollt der bewegliche Kreis im Innern des festen Kreises ab, beschreibt also P eine *Hypozykloide*, so wird

$$S = \frac{8b(a-b)}{a}.$$

3. Die Länge des Bogens $P_1 P_2$ der Kurve

$$x = f(t) \cos t - f'(t) \sin t, \quad y = f(t) \sin t + f'(t) \cos t$$

ist

$$s = [f(t) + f''(t)]_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Man findet nämlich

$$dx^2 + dy^2 = \{f(t) + f''(t)\}^2,$$

woraus sich sofort s mit Rücksicht auf Regel **5** ergibt. Wir erinnern daran, daß die vorgelegte Kurve die Hüllkurve der Geraden

$$x \cos t + y \sin t - f(t) = 0$$

darstellt; der Winkel t steht mit dem Winkel α, den die Tangente eines Kurvenpunktes mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, in der einfachen Beziehung $\alpha = 90^0 + t$. Vgl. Teil I, S. 158, 175 und 176.

4. Die Länge eines Bogens $P_1 P_2$ der *Neilschen Parabel* $y^2 = c^2 x^3$ bestimmen; ein Bild der Kurve findet sich in Teil I, S. 67, Fig. 26.

Aus $y = c x^{\frac{3}{2}}$ folgt

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{9c^2 x}{4}}\, dx = \frac{8}{27 c^2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9c^2 x}{4}\right)^3} \right]_{x_1}^{x_2};$$

man wird hierbei die Substitution $1 + \frac{9c^2 x}{4} = z$ anwenden.

5. Die Bogenlänge der *Kettenlinie*

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$$

zu berechnen.

Hier ist

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2\left(\frac{x}{m}\right)}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx$$

oder also

$$s = m\left[\operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)\right]_{x_1}^{x_2} = m\left[\sqrt{\operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) - 1}\right]_{x_1}^{x_2} = \sqrt{y_2{}^2 - m^2} - \sqrt{y_1{}^2 - m^2}.$$

Sind α_1 und α_2 die Winkel der in P_1 bzw. P_2 gezogenen Tangenten mit der positiven Richtung der x-Achse, so wird

$$s = m(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1).$$

Die Bogenlänge $P_1 P_2$ läßt sich daher, wenn die Kurve gezeichnet vorliegt, durch eine leicht konstruierbare Gerade darstellen. Es möge, um dies zu zeigen, angenommen werden, daß die Abszissen von P_1 und P_2 beide positiv seien. Beschreibt man alsdann um den Scheitel S der Kurve als Mittelpunkt Kreisbogen mit y_1 und y_2 als Radien, die den positiven Teil der x-Achse in L_1 und L_2 schneiden (vgl. Fig. 33, S. 67), so ist

$$OL_1 = \sqrt{y_1^2 - m^2}, \quad OL_2 = \sqrt{y_2^2 - m^2}, \quad \text{daher} \quad s = L_1 L_2 .$$

(Wie ist zu verfahren, wenn x_1 negativ, x_2 positiv ist?)

Die Bogenlänge der Kettenlinie läßt sich auch durch

$$s = y_2 \sin \alpha_2 - y_1 \sin \alpha_1$$

ausdrücken, denn allgemein ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right), \text{ also } \sin \alpha = \mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{m}\right);$$

ferner ist

$$m = y : \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right), \text{ daher } m \operatorname{tg} \alpha = y\, \mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{m}\right) = y \sin \alpha .$$

6. Im Anschluß an Aufg. 5 soll man die durch einen schweren Faden von gegebener Länge $2s$ gebildete *Kettenlinie* bestimmen, wenn dieser Faden zwei in gleicher Höhe gelegene Punkte A und B verbindet. Der Abstand AB der beiden Punkte sei $2a$, wobei $2a < 2s$ ist. Vgl. Aufg. 51, S. 90f.

In der Gleichung der Kettenlinie $y = m\, \mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ ist m zu bestimmen; dabei ist nach Aufg. 5:

$$2s = 2m\, \mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{m}\right),$$

daher nach Teil I, S. 80:

$$(1) \qquad \frac{s}{m} = \frac{a}{m}\left\{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{a}{m}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$(2) \qquad \frac{(s-a)\,3!}{a} = u, \quad \left(\frac{a}{m}\right)^2 = z,$$

so folgt[1]) aus (1):

$$(3) \qquad u = z + \frac{3!}{5!} z^2 + \frac{3!}{7!} z^3 + \cdots = \varphi(z).$$

Diese Reihe, die u als Funktion von z darstellt, ist nun umzukehren, d. h. man hat z als Funktion $f(u)$ der bekannten Größe u auszudrücken,

1) Vgl. hierzu C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig 1904 (Sammlung Schubert Nr. 32), S. 69 f.

um alsdann $m = a : \sqrt{z}$ berechnen zu können. Die Maclaurinsche Reihenentwicklung (vgl. Teil I, S. 77) ergibt

$$z = f(u) = f(0) + u f'(0) + \frac{u^2}{2!} f''(0) + \frac{u^3}{3!} f'''(0) + \cdots,$$

und hier ist offenbar $f(0) = 0$, denn für $z = 0$ wird nach (3) auch $u = 0$. Ferner ist (vgl. Teil I, S. 42, Aufg. 9)

$$f'(u) = 1 : \varphi'(z), \quad f''(u) = -\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)^3}, \quad f'''(u) = \frac{3\varphi''(z)^2 - \varphi'(z)\varphi'''(z)}{\varphi'(z)^5}, \cdots$$

und hieraus erhält man die Werte $f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots,$ indem man $z = 0$ setzt, da $u = 0$ und $z = 0$ ein zusammengehöriges Wertepaar bilden. Es ergibt sich

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -\frac{3!2}{5!} = -\frac{1}{10}, \quad f'''(0) = \frac{4}{175},$$

somit[1])

$$z = u - \frac{1}{20} u^2 + \frac{2}{525} u^3 + \cdots. \tag{4}$$

Den Abstand des Mittelpunktes M der Sehne AB von dem tiefsten Punkt S der Kettenlinie nennt man, z. B. wenn diese Kurve durch einen *Telegraphendraht* gebildet wird, den *Durchhang* $SM = d$ der Kettenlinie (Fig. 59). Man findet für ihn:

$$d = m\, \mathfrak{Cof}\left(\frac{a}{m}\right) - m = m\, \mathfrak{Cof}\, \sqrt{z} - m$$

oder mit Hilfe der Reihe für $\mathfrak{Cof}\, \sqrt{z}$ (vgl. Teil I, S. 80):

$$d = m\left\{\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{6!} + \cdots\right\}.$$

Hier ist nun m durch $a : \sqrt{z}$ zu ersetzen, und wenn man für z die Reihe (4) einführt, hierbei aber die Glieder von höherem als zweitem Grade in u vernachlässigt, folgt

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{u}\left\{1 + \frac{7}{120} u - \frac{379}{201600} u^2\right\}, \tag{5}$$

wobei

$$u = \frac{(s-a)\,3!}{a}.$$

Fig. 59.

Für $2a = 50$ m, $2s = 50{,}036$ m würde man z. B. $d = 0{,}822$ m finden.

---

1) Bei Runge findet sich hier a. a. O. ein Druckfehler, indem als Koeffizient von u^3 die Zahl $-\frac{1}{4 \cdot 5}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{42}\right)$ angegeben ist, während $+\frac{1}{4 \cdot 5}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{42}\right)$ stehen müßte.

Bei der Spannung eines Telegraphendrahtes ist die Änderung zu berücksichtigen, die seine Länge durch Änderung der Temperatur erfährt; insbesondere muß man darauf achten, daß die größere Spannung, die in dem Draht durch Verminderung seiner Länge bei einer Temperaturabnahme auftritt, die Zugfestigkeit nicht übertrifft.[1])

7. Für welche Werte des Exponenten k läßt sich das Integral für die Bogenlänge der Kurve $y = cx^k$ durch *elementare Funktionen* ausdrücken?

Die Bogenlänge

$$s = \int \sqrt{1 + c^2 k^2 x^{2k-2}}\, dx$$

führt hier auf ein *binomisches Integral* (vgl. Regel **4**, S. 173f.). Die allgemeine Gestalt dieser Integrale ist

$$\int x^m (a + b x^n)^p\, dx;$$

im vorliegenden Fall ist also $m = 0$, $n = 2k - 2$, $p = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = c^2 k^2$.

Aus Regel **4**, S. 173f. folgt, daß sich s durch elementare Funktionen darstellen läßt, wenn $1 : (2k - 2)$ eine ganze positive oder negative Zahl N ist oder wenn $k : (2k - 2)$ eine solche Zahl N ist. Es muß daher k von der Form $(2N + 1) : 2N$ oder von der Form $2N : (2N - 1)$ sein, d. h. k muß ein positiver Bruch sein, dessen Zähler und Nenner um eine Einheit voneinander verschieden sind.

8. Die Bogenlänge der *Parabel* $y^2 = px$ vom Scheitel O bis zum Punkte $P(x_1, y_1)$ zu bestimmen.

Die Integration wird hier etwas einfacher, wenn man y als Integrationsveränderliche und somit die Formel

$$s = \int_0^{y_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{1}$$

benutzt. Alsdann ergibt sich

$$s = \frac{2}{p} \int_0^{y_1} \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}}\, dy = \frac{2}{p} \left[\frac{y}{2} \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} + \frac{p^2}{8} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} \right) \right]_{y=0}^{y=y_1},$$

(vgl. Aufg. 17, S. 192) oder also

$$s = \frac{y_1}{p} \sqrt{y_1{}^2 + \frac{p^2}{4}} + \frac{p}{4} \ln \frac{y_1 + \sqrt{y_1{}^2 + \frac{p^2}{4}}}{\frac{1}{2} p}. \tag{2}$$

---

1) Näheres hierüber sowie über den Einfluß des Winddrucks und der Eisbelastung auf die Spannung und den Durchhang der Telegraphendrähte findet man z. B. bei K. Winnig, Die Grundlagen der Bautechnik für oberirdische Telegraphenlinien, Braunschweig 1910, S. 189—208.

Der Ausdruck $\frac{y_1}{p}\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{4}p^2}$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Schneidet nämlich die in P_1 gezogene Tangente der Kurve die Scheiteltangente in R, die Achse der Parabel in T und ist OM_1 die Abszisse von P_1 (Fig. 60), so ist $TO = OM_1$ und $TR = RP_1$ (vgl. Teil I, S. 49), daher

$$TP_1 = \sqrt{TM_1^2 + M_1P_1^2} = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2} = \frac{2y_1}{p}\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{4}p^2}$$

und

$$\frac{y_1}{p}\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}TP_1 = RP_1, \tag{3}$$

d. h. jener Ausdruck stellt das vom Berührungspunkt P_1 bis zum Schnitt mit der Scheiteltangente gemessene Stück der Tangente von P_1 dar.

Die Länge des Parabelbogens OP_1 läßt sich noch durch zwei andere Ausdrücke von bemerkenswerter Einfachheit darstellen. Führt man nämlich durch die Substitution

$$\frac{2y_1}{p} = \mathfrak{Sin}\, u_1 \tag{4}$$

den hyperbolischen Sinus ein, so wird

$$s = \frac{p}{8}(\mathfrak{Sin}\, 2u_1 + 2u_1). \tag{5}$$

Fig. 60.

Ferner ergibt sich bei Einführung des Winkels α_1, den die in P_1 gezogene Tangente der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, die Formel

$$s = \frac{p}{4}\left(\frac{\cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} - \ln \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\right). \tag{6}$$

Zum Beweis der Formel (5) beachte man, daß das Integral

$$s = \int_0^{y_1}\sqrt{1 + \frac{4y^2}{p^2}}\,dy \tag{7}$$

durch die Substitution

$$\frac{2y}{p} = \mathfrak{Sin}\, u, \quad dy = \frac{1}{2}p\,\mathfrak{Cos}\, u\,du \tag{8}$$

in

$$s = \frac{1}{2}p\int_0^{u_1}\mathfrak{Cos}^2 u\,du = \frac{1}{8}p\,(\mathfrak{Sin}\, 2u_1 + 2u_1) \tag{9}$$

(vgl. Aufg. 16, S. 68) übergeht. Hieraus folgt leicht Gleichung (6), denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \operatorname{tg}\alpha,$$

daher nach (8)

$$\mathfrak{Sin}\, u = \cot \alpha, \quad \mathfrak{Cof}\, u = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \mathfrak{Sin}\, 2u = \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{Cof}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = e^u = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2},$$

somit

$$(10) \qquad u = \ln \cot \frac{\alpha}{2} = -\ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Die Einführung dieser Ausdrücke für $\mathfrak{Sin}\, 2u$ und für u in (9) ergibt sofort die Gleichung (6). Übrigens ist leicht ersichtlich, daß

$$\frac{1}{8} p\, \mathfrak{Sin}\, 2u_1 = \frac{1}{4} p \frac{\cos \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1}$$

das schon oben erwähnte Stück RP_1 der Tangente des Punktes P_1 darstellt, so daß sich die Gleichungen (6) und (9) durch

$$(11) \qquad s = RP_1 - \frac{1}{4} p \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = RP_1 + \frac{1}{4} p u_1$$

ersetzen lassen.

9. Die Bogenlänge der *logarithmischen Linie* $y = a \ln x$ mit Hilfe der Substitution $a : x = \cot z$ zu bestimmen.

Das Integral

$$(1) \qquad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}\, dx$$

verwandelt sich durch die angegebene Substitution in

$$s = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a\, dz}{\sin z \cos^2 z},$$

woraus nach Multiplikation des Zählers mit dem Faktor $1 = \sin^2 z + \cos^2 z$ das Integral

$$(2) \qquad s = a \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\sin z}{\cos^2 z} + \frac{1}{\sin z} \right) dz$$

hervorgeht. Nach Aufg. 80, S. 101 f. und Aufg. 58, S. 94 findet man hierfür

$$(3) \qquad s = a \left[\frac{1}{\cos z} + \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} z \right]_{z_1}^{z_2}.$$

Die Grenzen z_1 und z_2 sind natürlich diejenigen Werte von z, die auf Grund der Substitution $a : x = \cot z$ zu $x = x_1$ und $x = x_2$ gehören.

Auch mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen läßt sich das Integral (1) berechnen. Durch die Substitution

$$\frac{a}{x} = \mathfrak{Sin}\, u, \quad dx = -\frac{a\,\mathfrak{Cos}\, u}{\mathfrak{Sin}^2 u}\, du$$

geht nämlich (1) über in

$$(4) \qquad s = -a \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathfrak{Cos}^2 u}{\mathfrak{Sin}^2 u}\, du,$$

und wenn man hier den Zähler durch $1 + \mathfrak{Sin}^2 u$ ersetzt, folgt

$$(5) \qquad s = -a \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 u} + 1\right) du = a \left[\mathfrak{Cotg}\, u - u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Die Grenzen u_1 und u_2 ergeben sich aus $a : x = \mathfrak{Sin}\, u$, wenn man $x = x_1$ bzw. $x = x_2$ setzt und nach u auflöst.

10. Die Bogenlänge der *Ellipse*

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu berechnen.

Hier wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

daher

$$(2) \qquad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx,$$

woraus nach Einführung der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ das Integral

$$(3) \qquad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

hervorgeht. Dies ist ein elliptisches Integral, denn würde man durch Erweitern mit $\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}$ oder mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ die Irrationalität des Zählers bzw. des Nenners beseitigen, so bliebe noch eine Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion vierten Grades von x (vgl. Regel **1**, S. 208 f. und Regel **5**, S. 209). Mit Hilfe der Substitution $x = a \sin \varphi$ erhält man

$$(4) \qquad s = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

also nach Regel **7**, S. 210 ein *elliptisches Integral zweiter Gattung*; dabei ist $\varphi_1 = \arc \sin \frac{x_1}{a}$, $\varphi_2 = \arc \sin \frac{x_2}{a}\cdot$ Dieses Integral läßt sich nun durch Entwicklung des Integranden in eine unendliche Reihe berechnen. Mit Rücksicht auf die Ungleichung $\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \leqq \varepsilon^2 < 1$ ist die Reihenentwicklung

$$(5)\quad (1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4 \sin^4 \varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6 \sin^6 \varphi - \cdots$$

gestattet. Da überdies diese Reihe *gleichmäßig* konvergiert (vgl. Teil I, S. 75 und im vorliegenden Teil S. 193), ist auch ihre gliedweise Integration erlaubt, wobei die Formel in Aufg. 71, S. 97 anzuwenden ist.

Wir wollen die Integration zur Berechnung des *Viertelumfanges* q der Ellipse durchführen; die Grenzen sind alsdann $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$, man hat daher das *vollständige* elliptische Integral E (vgl. Regel **7**, S. 210) zu berechnen. Mit Hilfe der in Aufg. 76, S. 99 bewiesenen Formel

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

findet man die Reihe

$$(6)\quad q = aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^3\right)^2 - \cdots\right\},$$

in der das erste Glied $\frac{1}{2}a\pi$ den Viertelumfang des über der großen Achse der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreises ausdrückt.

11. Die Bogenlänge der Kurve $y = \sin x$ zu berechnen.

Man findet

$$s = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2 x}\, dx,$$

also ein elliptisches Integral zweiter Gattung, das schon in Aufg. 10 näher betrachtet wurde.

12. Man soll zeigen, daß der von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ gerechnete Bogen der *Zykloide*

$$x = a t - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

so groß ist wie der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen $a_1 = a + b$, $b_1 = |a - b|$. Die Kurve entsteht dadurch, daß ein Kreis (Radius a) auf einer Geraden (x-Achse) ohne zu gleiten rollt; ein mit dem Kreis fest verbundener Punkt (Abstand vom Mittelpunkt gleich b) beschreibt die Kurve (vgl. Teil I, S. 47).

Für den erwähnten Bogen der Zykloide findet man

$$S = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(a - b\cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}\, dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 2(a+b)\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{t}{2}}\, dt,$$

woraus mit Hilfe der Substitution $t = \pi - 2\varphi$ das Integral

$$(1) \qquad S = 4(a+b)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

hervorgeht; hierbei ist $\frac{4ab}{(a+b)^2}$ sicher ein echter Bruch.

Für die Bogenlänge der *gemeinen* Zykloide $(a = b)$ vgl. Aufg. 1, S. 269 f. und Teil I, S. 165, Aufg. 36.

Andererseits hat man für den Umfang $4q$ einer Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1, wie in Aufg. 10 gezeigt wurde:

$$(2) \qquad 4q = 4a_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad \text{wo} \quad \varepsilon_1^2 = \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} \text{ ist.}$$

Die beiden Ausdrücke S und $4q$ werden einander gleich, wenn die Beziehungen

$$a_1 = a + b, \quad \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2}$$

stattfinden.

13. Wenn ein Kreis K_1 vom Radius b auf der Außenseite eines festen Kreises K vom Radius a rollt ohne zu gleiten, so beschreibt ein mit dem beweglichen Kreis K_1 fest verbundener Punkt P eine Kurve, die gewöhnlich als *Epitrochoide* bezeichnet wird. Berühren sich die beiden Kreise zu Anfang der Bewegung im Punkte $x = a$ der Abszissenachse und hat alsdann der vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises um die Strecke c entfernte Punkt P die Abszisse $x = a + b + c$, so gilt für die von P beschriebene Bahn die Parameterdarstellung

$$(1) \quad x = (a+b)\cos t + c\cos\frac{a+b}{b}t, \quad y = (a+b)\sin t + c\sin\frac{a+b}{b}t.$$

Der Parameter t hat hierbei dieselbe Bedeutung wie bei der in Aufg. 2, S. 270 behandelten Epizykloide, die man aus (1) für $c = b$ erhält; bei ihr liegt P *auf* der Peripherie des rollenden Kreises.

Man soll nun zeigen, daß der einem einmaligen Abrollen des Kreises K_1 entsprechende Kurvenbogen S so lang ist wie der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen

$$(2) \qquad a_1 = \frac{(a+b)(b+c)}{a}, \qquad b_1 = \left|\frac{(a+b)(b-c)}{a}\right|.$$

Der Kürze halber werde $a+b=p$, $\frac{a+b}{b}=\lambda$ gesetzt; alsdann folgt aus (1):

$$dx = -(p\sin t + c\lambda \sin \lambda t)dt, \quad dy = (p\cos t + c\lambda\cos\lambda t)dt,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = p^2 + c^2\lambda^2 + 2pc\lambda\cos\frac{at}{b} = (p+c\lambda)^2 - 2pc\lambda\left(1-\cos\frac{at}{b}\right),$$

daher

$$(3) \qquad s = (p+c\lambda)\int\sqrt{1-\frac{4pc\lambda}{(p+c\lambda)^2}\sin^2\frac{at}{2b}}\,dt,$$

wo noch die Integrationsgrenzen festzusetzen sind. Ist seit Anfang der Bewegung der zu einem Zentriwinkel φ gehörige Bogen $b \operatorname{arc}\varphi$ des Kreises K_1[1]) längs des Bogens $a \operatorname{arc} t$ des Kreises K abgerollt, so besteht die Beziehung $at = b\varphi$; hierbei gibt φ auch den Winkel an, um den sich K_1 seit Anfang der Bewegung gedreht hat. Während eines einmaligen Abrollens der ganzen Peripherie von K_1 durchläuft $\operatorname{arc}\varphi$ die Werte von 0 bis 2π und $\operatorname{arc} t$ die Werte von 0 bis $\frac{b\cdot 2\pi}{a}$; daher sind $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{2b\pi}{a}$ die Grenzen des Integrals (3). Führt man aber $\psi = at:2b$ als neue Veränderliche in (3) ein, so werden $\psi_1 = 0$ und $\psi_2 = \pi$ die Integrationsgrenzen, und man erhält

$$(4) \qquad S = \frac{(p+c\lambda)2b}{a}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\frac{4pc\lambda}{(p+c\lambda)^2}\sin^2\psi}\,d\psi,$$

wofür nach Aufg. 5, S. 74

$$(5) \qquad S = \frac{4(p+c\lambda)b}{a}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\frac{4pc\lambda}{(p+c\lambda)^2}\sin^2\psi}\,d\psi$$

gesetzt werden kann.

Andrerseits hat man für den Umfang $4q$ einer *Ellipse* mit den Halbachsen a_1, b_1 nach Aufg. 10:

$$(6) \qquad 4q = 4a_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\varepsilon_1^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \text{wo} \quad \varepsilon_1^2 = \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2} \text{ ist.}$$

---

1) Arc φ bedeutet den zum Zentriwinkel φ eines Kreises vom Radius Eins gehörigen Kreisbogen.

Die Ausdrücke (5) und (6) werden einander gleich, wenn die Beziehungen stattfinden:

$$a_1 = \frac{(p + c\lambda) b}{a} = \frac{(a + b)(b + c)}{a}, \quad \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2} = \frac{4bc}{(b + c)^2}.$$

Ähnliche Beziehungen zu einer Ellipse gelten natürlich auch dann, wenn der Kreis K_1 auf der Innenseite des festen Kreises abrollt, also im Fall der *Hypotrochoide*.[1])

14. Bei jeder *logarithmischen Spirale* $r = a^\vartheta$ ist die Länge des vom Anfangspunkt bis zu einem beliebigen Punkt $P_1(r_1, \vartheta_1)$ der Kurve gemessenen Bogens so groß wie die Länge der zu P gehörigen Polartangente $P_1 T$ (Fig. 61).

Fig. 61.

Die Länge T der Polartangente ist nach Teil I, S. 66

$$T = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{a^{\vartheta_1}}{\ln a} \sqrt{1 + (\ln a)^2};$$

die Bogenlänge wird

$$s = \sqrt{1 + (\ln a)^2} \int_{-\infty}^{\vartheta_1} a^\vartheta \, d\vartheta = \frac{a^{\vartheta_1}}{\ln a} \sqrt{1 + (\ln a)^2}.$$

Der durch zwei beliebige Punkte P_1, P_2 der Kurve begrenzte Bogen wird

$$s = \frac{a^{\vartheta_2} - a^{\vartheta_1}}{\ln a} \sqrt{1 + (\ln a)^2}.$$

Nun ist bei der logarithmischen Spirale der Winkel γ zwischen Tangente und Radiusvektor konstant, und zwar hat man $\operatorname{tg} \gamma = 1 : \ln a$ (vgl. Teil I, Aufg. 31, S. 54); daher wird

$$s = \frac{r_2 - r_1}{\cos \gamma},$$

wenn man noch die Radienvektoren $r_1 = a^{\vartheta_1}$, $r_2 = a^{\vartheta_2}$ einführt.

15. Die Bogenlänge der *Kardioide* $r = p(1 + \cos \vartheta)$ zu berechnen. Vgl. Teil I, S. 63 f.

Man findet leicht

$$s = 2p \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta = 4p \left[\sin \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Der Umfang der ganzen Kurve wird $S = 8p$.

---

1) H. Wiener [Mitteilungen des math.-naturw. Vereins in Württemberg, 2. Serie, Bd. 9 (1907), S. 46—50] zeigte rein geometrisch, daß die Rektifikation der Epi- und Hypotrochoiden auf Ellipsenbogen führt.

16. Die Bogenlänge der *Zissoide*

$$r = 2a\,\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} \tag{1}$$

zu berechnen (vgl. Teil I, S. 62 f.).

Man findet

$$s = 2a\int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\,d\vartheta, \tag{2}$$

ein Integral, das durch die Substitution $\sqrt{3}\cos\vartheta = 1 : z$ in

$$s = 2a\sqrt{3}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}dz = 2a\sqrt{3}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} + 2a\sqrt{3}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}dz \tag{3}$$

übergeht. Der erste Summand der rechten Seite wird durch die Substitution $1 : z = u$, ohne Rücksicht auf die Grenzen, in

$$\begin{aligned} -2a\sqrt{3}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} &= -2a\sqrt{3}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) \\ &= -2a\sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}\cos\vartheta+\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\right) \end{aligned}$$

übergeführt, der zweite ist gleich $2a\sqrt{3(1+z^2)} = \frac{2a\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\cos\vartheta}$. Daher ergibt sich

$$s = 2a\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\cos\vartheta} - \sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}\cos\vartheta+\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\right)\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}, \tag{4}$$

und wenn man zur Abkürzung $\sqrt{3}\cos\vartheta_i + \sqrt{1+3\cos^2\vartheta_i} = \alpha_i$, $(i = 1, 2)$ setzt, folgt

$$s = 2a\sqrt{3}\left[\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} - \ln\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}. \tag{5}$$

17. Die Bogenlänge der *Lemniskate* $r^2 = 2c^2\cos 2\vartheta$ zu bestimmen. Mit Hilfe von $\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{2c^2\sin 2\vartheta}{r}$ folgt

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{2c^2}{\cos 2\vartheta},$$

daher

$$s = c\sqrt{2}\int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = c\sqrt{2}\int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-2\sin^2\vartheta}}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck erinnert an die Normalform

$$F(k,\ \vartheta) = \int\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

des elliptischen Integrals erster Gattung (vgl. Regel **7**, S. 210), jedoch muß bei dieser $0 < k^2 < 1$ sein, während nun $k^2 = 2$ ist. Um die wirkliche Normalform herzustellen ist in (1) durch die Substitution $2 \sin^2 \vartheta = \sin^2 \varphi$ eine neue Veränderliche einzuführen, und zwar ist diese Substitution erlaubt, so lange $|\sin \varphi| = |\sqrt{2} \sin \vartheta| \leqq 1$ oder $|\sin \vartheta| \leqq + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Diese Ungleichung ist aber für alle Punkte der Lemniskate erfüllt, denn im ersten Quadranten entsprechen reelle Kurvenpunkte nur solchen Polarwinkeln, die im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 45^0$ liegen, und in diesem Intervall ist $0 \leqq \sin \vartheta \leqq + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Auch in den übrigen Quadranten ist für reelle Kurvenpunkte stets $|\sin \vartheta| \leqq + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Durch die Substitution

$$2 \sin^2 \vartheta = \sin^2 \varphi, \quad \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \, d\varphi$$

geht aus (1) die Gleichung

$$s = c \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} \tag{2}$$

hervor; insbesondere für den von 0 bis ϑ_1 bzw. 0 bis φ_1 gemessenen Bogen der Lemniskate erhält man das elliptische Integral erster Gattung

$$s = c \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} = c\, F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_1\right), \tag{3}$$

das nur durch Entwicklung in eine unendliche Reihe berechnet werden kann. Es gelten in dieser Hinsicht dieselben Bemerkungen wie bei dem elliptischen Integral zweiter Gattung für die Bogenlänge einer Ellipse (vgl. Aufg. 10, S. 277 f.). Wir verzichten darauf, diese Reihenentwicklung hier zu geben, zumal dies in Aufg. 5, S. 216 bei dem allgemeinen Integral $F(k, \varphi)$ geschehen ist; übrigens wird in der folgenden Aufgabe der Umfang der ganzen Lemniskate berechnet.

18. Den Umfang eines der n unter sich kongruenten Blätter, aus denen die Sinusspirale

$$r^n = a^n \cos n\vartheta \tag{1}$$

besteht, zu berechnen (vgl. S. 254).

Der halbe Umfang $\frac{1}{2}u$ desjenigen Blattes der Kurve, das die in der Richtung $\vartheta = 0$ verlaufende Polarachse zur Symmetrielinie hat, wird durch die Punkte $\vartheta = 0$, $r = a$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{n}$, $r = 0$ begrenzt; man hat somit

$$\frac{1}{2} u = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} \, d\vartheta. \tag{2}$$

Mit Hilfe von

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{a \sin n\vartheta}{\cos^{\frac{n-1}{n}} n\vartheta}$$

folgt

$$(3) \qquad \frac{1}{2}u = a\int_0^{\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}} \cos^{\frac{1-n}{n}} n\vartheta \, d\vartheta,$$

woraus durch die Substitution $n\vartheta = \varphi$ die Formel

$$(4) \qquad \frac{1}{2}u = \frac{a}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{1-n}{n}} \varphi \, d\varphi$$

hervorgeht. Dieses Integral läßt sich durch Gammafunktionen ausdrücken, denn nach Aufg. 10, S. 243 ist

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m \varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} = +\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)},$$

wobei $m + 1 > 0$ sein muß. In dem Integral (4) ist $m + 1 = \frac{1}{n}$, daher wird

$$(6) \qquad \frac{1}{2}u = \frac{a}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)} = \frac{a}{n}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)},$$

wofür nach Aufg. 5, S. 241 auch

$$(7) \qquad u = \frac{a}{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$$

gesetzt werden kann.

Insbesondere für die *Lemniskate*

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\vartheta \qquad (a^2 = 2c^2,\ n = 2)$$

ergibt sich

$$u = \frac{c\sqrt{2}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{c\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Da die Lemniskate aus zwei Blättern besteht, wird ihr gesamter Umfang L gleich $2u$. Nun ist nach Aufg. 7, S. 241

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \pi\sqrt{2},$$

daher

$$(8) \qquad L = \frac{c\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Bei Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{4})$ mit Hilfe der Tafel S. 245 hat man die Formel $\Gamma(\frac{1}{4}) = 4\Gamma(\frac{5}{4})$ (vgl. Aufg. 4, S. 240) zu benutzen und findet alsdann $\Gamma(\frac{1}{4}) = 4 \cdot 0{,}90640$, daher

$$(9) \qquad L = \frac{16\, c \cdot 0{,}90640^2}{\sqrt{3{,}14159}} = c \cdot 7{,}41630.$$

Übrigens ergibt sich nun leicht ein Zusammenhang zwischen dem *vollständigen* elliptischen Integral erster Gattung $K(\sqrt{\frac{1}{2}})$ (vgl. Regel **7**, S. 210) und dem Ausdruck $\Gamma(\frac{1}{4})$. Denn nach Aufg. 17 ist die Bogenlänge $\frac{1}{4}L$ eines Quadranten der Lemniskate:

$$\frac{1}{4}L = c\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\vartheta}} = c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = c \cdot K(\sqrt{\tfrac{1}{2}}),$$

daher folgt

$$4\sqrt{\pi}\, K(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2.$$

19. Ist B der eine Endpunkt der kleinen Achse einer Ellipse, A der eine Endpunkt der großen Achse und sind T_1, T_2 zwei solche Punkte des durch B und A begrenzten Viertelumfangs der Kurve, daß ihre Normalen vom Mittelpunkt der Ellipse einen und denselben Abstand p_τ haben, so gilt für die Bogen BT_1 und T_2A die einfache Beziehung

$$(1) \qquad BT_1 - T_2A = p_\tau.$$

Während die Länge eines beliebigen Ellipsenbogens nicht durch eine mit Zirkel und Lineal konstruierbare Strecke dargestellt werden kann (denn die Berechnung dieser Länge führt ja auf ein elliptisches Integral), ist also eine derartige Konstruktion bei der Differenz gewisser Ellipsenbogen möglich. Die Beziehung (1) ist zu beweisen.

Der Abstand p der im Punkt $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ gezogenen Normale der Ellipse vom Mittelpunkt O der Kurve ist (vgl. Teil I, S. 123)

$$(2) \qquad p = \frac{c^2 \sin t \cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \qquad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Die Parameter t von solchen Punkten der Kurve, deren Normalen von O gleichen Abstand p haben, müssen daher die Gleichung

$$(3) \qquad \cos^4 t - \frac{c^2 + p^2}{c^2}\cos^2 t + \frac{a^2 p^2}{c^4} = 0$$

erfüllen. Wird diese Gleichung als quadratische Gleichung für $\cos^2 t$ aufgefaßt und beachtet man, daß für alle Punkte eines und desselben Quadranten der Kurve $\cos t$ dasselbe Vorzeichen hat, so ist ersichtlich, daß es auf jedem Quadranten der Ellipse *zwei* Punkte P_1, P_2 gibt, deren

Normalen von O um die gleiche Strecke p entfernt sind. So lange $p \leqq a - b$ ist, sind diese Punkte reell (vgl. Teil I, S. 51 f. und 123); im folgenden möge dies vorausgesetzt werden. Die Parameter dieser Punkte seien t_1 und t_2; alsdann folgt aus (3):

$$\cos^2 t_1 + \cos^2 t_2 = \frac{c^2 + p^2}{c^2}, \quad \cos^2 t_1 \cos^2 t_2 = \frac{a^2 p^2}{c^4} \tag{4}$$

und hieraus geht nach Elimination von p die Gleichung

$$a^2(\cos^2 t_1 + \cos^2 t_2) = a^2 + c^2 \cos^2 t_1 \cos^2 t_2 \tag{5}$$

hervor, die auch durch

$$\frac{a \sin t_1}{\cos t_2} = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_1} \quad \text{oder} \quad \frac{a \sin t_2}{\cos t_1} = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_2} \tag{6}$$

ersetzt werden kann. Übrigens läßt sich die Beziehung, die zwischen den Parametern zweier Punkte P_1, P_2 von der angegebenen Beschaffenheit stattfindet, auch in der einfachen Gestalt

$$\operatorname{tg}^2 t_1 \cdot \operatorname{tg}^2 t_2 = b^2 : a^2$$

schreiben. Die Wurzeln in (6) haben das Pluszeichen zu erhalten, wenn man sich, wie im folgenden geschehen soll, auf Punkte des *ersten* Quadranten beschränkt. Durch Differentiation von (5) ergibt sich

$$-\frac{a^2 \sin t_1}{\cos t_2} dt_1 - \frac{a^2 \sin t_2}{\cos t_1} dt_2 = c^2 \cdot d(\cos t_1 \cos t_2)$$

oder mit Rücksicht auf (6):

$$-\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_1}\, dt_1 - \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_2}\, dt_2 = \frac{c^2}{a} d(\cos t_1 \cos t_2). \tag{7}$$

Geht man von dieser Gleichung zwischen Differentialen zu der entsprechenden Gleichung zwischen den Integralen über und erstreckt man die Integration beim ersten Glied der linken Seite von $t_1 = \sigma_1$ bis $t_1 = \tau_1$, so müssen beim zweiten Glied die Grenzen der Integration solche Werte $t_2 = \sigma_2$, $t_2 = \tau_2$ sein, daß die Wertepaare σ_1, σ_2 und τ_1, τ_2 dieselbe Gleichung (5) erfüllen wie das Wertepaar t_1, t_2.

Insbesondere gehört zu $\sigma_1 = \frac{1}{2}\pi$ der Wert $\sigma_2 = 0$, denn $\sigma_1 = \frac{1}{2}\pi$ ist der Parameter des Scheitels B der Nebenachse der Ellipse, dessen Normale von O den Abstand $p = 0$ hat; außer B ist aber der Endpunkt A der Hauptachse der einzige Punkt des ersten Quadranten, dessen Normale gleichfalls durch O geht und $\sigma_2 = 0$ ist der zu A gehörige Parameter. Auch die aus (4) folgende Gleichung $\cos^2 \sigma_1 + \cos^2 \sigma_2 = (c^2 + p^2) : c^2$ ergibt dies sofort für $\sigma_1 = \frac{1}{2}\pi$ und $p = 0$.

Mit $\sigma_1 = \frac{1}{2}\pi$ und $\sigma_2 = 0$ als unteren Integrationsgrenzen folgt aus (7)

$$(8) \qquad -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\tau_1} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_1}\, dt_1 - \int_0^{\tau_2} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_2}\, dt_2$$

$$= \frac{c^2}{a} \Big[\cos t_1 \cos t_2\Big]_{\frac{1}{2}\pi, 0}^{\tau_1, \tau_2} = \frac{c^2}{a} \cos \tau_1 \cos \tau_2,$$

wobei der Verabredung entsprechend τ_1 und τ_2 dem Intervalle von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ angehören.

Es seien nun T_1 und T_2 die zu den Parametern τ_1 und τ_2 gehörigen Kurvenpunkte des ersten Quadranten, deren Normalen vom Mittelpunkt der Ellipse um dieselbe Strecke p_τ entfernt sind. Alsdann stellt

$$-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\tau_1} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_1}\, dt_1 = + \int_{\tau_1}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t_1}\, dt_1$$

die Länge des Bogens BT_1 dar, während das andere in (8) auftretende Integral gleich der Bogenlänge $T_2 A$ ist; der Ausdruck $\frac{c^2}{a} \cos \tau_1 \cos \tau_2$ ist, wie aus der zweiten Gleichung (4) folgt, gleich p_τ. So wird demnach (8) gleichbedeutend mit:

$$(9) \qquad BT_1 - T_2 A = p_\tau.$$

Der eine der beiden Punkte T_1, T_2 (z. B. T_1) kann willkürlich auf dem ersten Quadranten gewählt werden; der andere (T_2) ist derjenige Punkt dieses Quadranten, dessen Normale vom Mittelpunkt O der Ellipse um dieselbe Strecke p_τ entfernt ist wie die Normale des zuerst gewählten Punktes.

Die rechte Seite der Gleichung (9) kann noch in eine andere Gestalt gebracht werden. Wird nämlich $p_\tau = \frac{c^2}{a} \cos \tau_1 \cos \tau_2$ mit a^2 erweitert und bezeichnet man mit x_1 und x_2 die Abszissen $a \cos \tau_1$, $a \cos \tau_2$ von T_1 und T_2, so folgt

$$(10) \qquad BT_1 - T_2 A = \frac{\varepsilon^2 x_1 x_2}{a},$$

wobei $\varepsilon = c : a$ die numerische Exzentrizität der Ellipse bedeutet.[1])

Auf jedem Quadranten der Kurve gibt es *einen* Punkt T, dessen Normale vom Mittelpunkt O einen maximalen Abstand $a - b$ hat; der

1) Die Formel (10) hat zuerst G. di Fagnano im Jahre 1716 bewiesen. Vgl. Opere matematiche del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, hrsg. von V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli, Bd. 2, Mailand-Rom-Neapel 1911, S. 289.

ihm im Sinn der vorstehenden Betrachtungen entsprechende Punkt fällt mit T selbst zusammen (vgl. Teil I, S. 52 und 123, wo die Koordinaten von T angegeben sind). Für diesen Punkt T tritt an Stelle von (9) und (10) die Gleichung

(11) $$BT - TA = a - b.$$

Sind S_1, S_2 zwei Ellipsenpunkte, deren Normalen von O um die Strecke p_σ entfernt sind, so ist nach (9)

(12) $$BS_1 - S_2A = p_\sigma$$

und durch Subtraktion von (9) und (12) folgt

$$BT_1 - BS_1 - (T_2A - S_2A) = p_\tau - p_\sigma$$

oder

(13) $$S_1T_1 - T_2S_2 = p_\tau - p_\sigma,$$

wofür auch

(14) $$S_1T_2 - T_1S_2 = p_\tau - p_\sigma$$

geschrieben werden kann.

20. Gelangt man bei Berechnung der Bogenlänge P_1P_2 der Kurve $y = f(x)$ zu dem Ergebnis

(1) $$s = \Big[\varphi(x)\Big]_{x_1}^{x_2},$$

so ist die zwischen zwei Punkten mit denselben Abszissen x_1 und x_2 gemessene Bogenlänge s_1 der Kurve

(2) $$y = af(x) + \sqrt{a^2-1}\,\varphi(x)$$

durch

(3) $$s_1 = \Big[a\,\varphi(x) + \sqrt{a^2-1}\,f(x)\Big]_{x_1}^{x_2}$$

gegeben. Dies soll bewiesen werden.[1])

Für die zweite Kurve wird

(4) $$\left(\frac{ds_1}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2f'(x)^2 + (a^2-1)\,\varphi'(x)^2 + 2a\sqrt{a^2-1}\,f'(x)\,\varphi'(x),$$

für die erste

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + f'(x)^2 = \varphi'(x)^2;$$

daher ist $1 = \varphi'(x)^2 - f'(x)^2$ und durch Einsetzen dieses Ausdrucks an Stelle von 1 in die rechte Seite der Gleichung (4) erhält man

$$\left(\frac{ds_1}{dx}\right)^2 = \{\sqrt{a^2-1}\,f'(x) + a\,\varphi'(x)\}^2$$

und hieraus die Gleichung (3).

1) Vgl. O. Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 15 (1870), S. 215.

21. Wird in jedem Punkt P der durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebenen Kurve k die Normale errichtet und auf ihr von P aus nach beiden Seiten eine Strecke von der konstanten Länge l abgetragen, so erfüllen die äußeren Endpunkte dieser Strecken eine äußere, die inneren Endpunkte eine innere *Parallelkurve*. Die Parameterdarstellung für die Parallelkurve ist (Teil I, S. 53):

$$(1) \qquad \xi = \varphi \pm \frac{l\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \eta = \psi \mp \frac{l\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Es sei nun s ein durch die Punkte P_1, P_2 begrenzter Bogen der Kurve k, σ sei die Länge des durch die Normalen von P_1 und P_2 begrenzten Bogens der äußeren oder inneren Parallelkurve; ferner sei γ das Bogenmaß des von den Normalen in ihrem Schnittpunkt C gebildeten Winkels P_1CP_2. Alsdann findet die Beziehung statt

$$(2) \qquad \sigma = s \pm l\gamma.$$

Dies soll bewiesen werden.

Man findet leicht

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt} \pm \frac{l(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{\varphi'^2 + \psi'^2},$$

daher

$$(3) \qquad \sigma = s \pm l\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

Bezeichnet nun α den Winkel, den die in irgend einem Punkt P der Kurve k gezogene Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt, so ist (vgl. auch Teil I, Aufg. 25, S. 162):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'}{\varphi'}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\psi'}{\varphi'}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Mit Rücksicht hierauf geht aus (3) die Gleichung

$$\sigma = s \pm l\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = s \pm l \operatorname{arc}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

hervor, in der das Zeichen arc das Bogenmaß der Differenz der Winkel α_2 und α_1 andeutet, den die in P_2 und P_1 gezogenen Tangenten der Kurve k mit der positiven Richtung der x-Achse einschließen. Der Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$ ist aber gleich dem Winkel P_1CP_2 der beiden Normalen.

22. Ist $\varphi(u, v) = 0$ die Gleichung einer Kurve k in *Linienkoordinaten* (vgl. Teil I, S. 178), so gilt für die Länge eines Bogens s_1 der zu dieser Kurve mit bezug auf den Koordinatenanfang O als Pol gehörigen Fußpunktkurve die Formel

$$s_1 = \int \frac{\sqrt{du^2 + dv^2}}{u^2 + v^2}.$$

Zum Beweis sei $OP_1 = r$ die Länge des Lotes, das man von O auf die in irgend einem Punkte P der Kurve k gezogene Tangente fällen kann; ϑ sei der Winkel, den dieses Lot mit der positiven Richtung der x-Achse bildet (Fig. 62). Alsdann ist nach Regel **3**, S. 268 f.

Fig. 62.

$$ds_1 = \sqrt{r^2\, d\vartheta^2 + dr^2}$$

der Ausdruck für das Bogendifferential der Fußpunktkurve.

Die zur Tangente von P gehörigen Linienkoordinaten u, v sind (vgl. Teil I, S. 178) die negativen reziproken Werte der Länge der Stücke, die diese Tangente auf den Koordinatenachsen abschneidet; daher ist

$$u = -\frac{\cos\vartheta}{r}, \quad v = -\frac{\sin\vartheta}{r},$$

ferner

$$du^2 + dv^2 = \frac{r^2\, d\vartheta^2 + dr^2}{r^4} = \frac{ds_1^{\,2}}{r^4}.$$

Mit Hilfe von $u^2 + v^2 = 1 : r^2$ folgt hieraus die zum Beweis vorgelegte Formel.[1])

23. Der Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines im Raume gelegenen Punktes P und seinen räumlichen Polarkoordinaten r, ψ, ϑ wird bekanntlich durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = r \sin\psi \cos\vartheta, \quad y = r \sin\psi \sin\vartheta, \quad z = r \cos\psi$$

vermittelt, in denen r die Länge des Radiusvektors von P bezeichnet. Der Winkel ϑ hat die analoge Bedeutung wie die geographische Länge eines auf der Erdkugel gelegenen Ortes, er kann also, je nach der Lage des Punktes P, alle Werte von 0^0 bis 360^0 annehmen; dabei liegt der Nullmeridian in der xz-Ebene (Fig. 63). Der Winkel ψ bezeichnet den auf dem Meridian von P gemessenen Abstand NP vom Nordpol N, durch den die z-Achse hindurchgeht; daher möge ψ die Poldistanz genannt werden. Dieser Winkel kann alle Werte von 0^0 bis 180^0 annehmen.

Fig. 63.

Man soll nun zeigen, daß die Bogenlänge einer auf der Kugel $r = a$ gelegenen und durch $\psi = f(\vartheta)$ dargestellten Kurve durch

$$(2) \qquad s = a\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\sin^2\psi + \left(\frac{d\psi}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = a\int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{\sin^2\psi \left(\frac{d\vartheta}{d\psi}\right)^2 + 1}\; d\psi$$

gegeben ist.

1) Vgl. A. Transon, Nouvelles Annales de Mathématiques, 2. Serie, Bd. 8 (1869), S. 192; G. Fouret ebenda, S. 516—518.

Setzt man in den Gleichungen (1) $r = a$ und denkt man sich $\psi = f(\vartheta)$ in (1) eingetragen, so sind x, y, z Funktionen von ϑ; nach Regel **4** und **5**, S. 269 wird alsdann

$$\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2,$$

und zwar findet man hierfür

$$a^2\left(\sin^2\psi + \left(\frac{d\psi}{d\vartheta}\right)^2\right).$$

24. Wird ein Punkt $P(x, y, z)$ einer beliebigen Fläche mit zwei benachbarten Punkten R und S durch Bogenelemente ds bzw. $d\sigma$ verbunden und sind $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ bzw. $x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z$ die Koordinaten von R bzw. S, so besteht für den Winkel α, den die beiden Fortschreitungsrichtungen PR und PS miteinander bilden, die Formel[1])

$$(1)\quad \cos\alpha = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}} = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds\,\delta s}.$$

Mit Hilfe dieser Formel soll gezeigt werden, daß auf einer Kugel diejenige Kurve, die, von dem beliebig gewählten Punkte P_0 der Kugel ausgehend, alle Breitenkreise unter konstantem Winkel α schneidet, die Gleichung hat

$$(2)\qquad \ln \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi - \ln \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi_0 = -(\vartheta - \vartheta_0)\operatorname{tg}\alpha.$$

Hierbei haben ψ und ϑ, analog ψ_0 und ϑ_0, die in Aufg. 23 angegebene Bedeutung. Man nennt diese Kurven *Loxodromen.*[2])

Ist $r = a$ der Radius der Kugel, $ds = PR$ das Bogenelement der Loxodrome, $\delta s = PS$ das Bogenelement des durch P gehenden Breitenkreises, für dessen Punkte ψ konstant, also $\delta\psi = 0$ ist, so hat man nach Aufg. 23:

$$\begin{aligned}
dx &= a\cos\psi\cos\vartheta\,d\psi - a\sin\psi\sin\vartheta\,d\vartheta, & \delta x &= -a\sin\psi\sin\vartheta\,\delta\vartheta,\\
dy &= a\cos\psi\sin\vartheta\,d\psi + a\sin\psi\cos\vartheta\,d\vartheta, & \delta y &= a\sin\psi\cos\vartheta\,\delta\vartheta,\\
dz &= -a\sin\psi\,d\psi, & \delta z &= 0,\\
ds &= a\sqrt{\sin^2\psi\,d\vartheta^2 + d\psi^2}, & \delta s &= a\sin\psi\,\delta\vartheta.
\end{aligned}$$

---

1) Diese Formel ist leicht zu beweisen. Sind nämlich $\frac{dx}{ds} = \varkappa$, $\frac{dy}{ds} = \lambda$, $\frac{dz}{ds} = \mu$ und $\frac{\delta x}{\delta s} = \varkappa'$, $\frac{\delta y}{\delta s} = \lambda'$, $\frac{\delta z}{\delta s} = \mu'$ die Richtungskosinus der Richtungen PR und PS, so gilt für den Kosinus des durch ds und δs gebildeten Winkels bekanntlich die Gleichung $\cos\alpha = \varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' + \mu\mu'$.

2) Vom griechischen λοξός, schief, und δρόμος, Lauf.

Daher wird nach (1):

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{a^2 \sin^2\psi\, d\vartheta\, \delta\vartheta}{a^2 \sin\psi \sqrt{\sin^2\psi\, d\vartheta^2 + d\psi^2}\,\delta\vartheta} = \frac{\sin\psi\, d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\psi\, d\vartheta^2 + d\psi^2}}$$

oder

$$(4) \qquad \frac{d\psi}{\sin\psi} = \pm \operatorname{tg}\alpha\, d\vartheta.$$

Bezüglich der beiden Vorzeichen der rechten Seite dieser Gleichung ist folgendes zu bemerken. Von einem Punkte P aus kann man auf dem durch P gehenden Breitenkreis in zwei Richtungen fortschreiten, im Sinne der wachsenden oder im Sinne der abnehmenden geographischen Länge ϑ. Ist α der Winkel, den die Fortschreitungsrichtung auf der Loxodrome mit der auf dem Breitenkreis markierten Richtung der *wachsenden* ϑ bildet und wird der Winkel α von dieser Richtung aus, die sich nach Osten erstrecken möge, in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne gemessen, so ist in (4) rechts das Minuszeichen zu setzen, während die Quadratwurzel in (3) das Pluszeichen zu erhalten hat. Durch Integration von (4) ergibt sich alsdann nach Aufg. 58, S. 94 die Gleichung (2).

25. Es ist zu zeigen, daß bei der soeben für die Vorzeichen getroffenen Verabredung die Bogenlänge der Loxodrome gegeben ist durch

$$(1) \qquad s = -\frac{a}{\sin\alpha}(\psi_2 - \psi_1).$$

Nach Aufg. 23 ist

$$s = a\int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{\sin^2\psi\left(\frac{d\vartheta}{d\psi}\right)^2 + 1}\; d\psi,$$

woraus mit Rücksicht auf (4) in Aufg. 24 die Gleichung

$$(2) \qquad s = \pm\frac{a}{\sin\alpha}\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \pm\frac{a}{\sin\alpha}(\psi_2 - \psi_1)$$

hervorgeht.

Soll s stets positiv sein, so ist in (1) das Minuszeichen zu setzen, denn man kann sich leicht überzeugen, daß $\sin\alpha$ und $d\psi$ stets entgegengesetzte Vorzeichen haben; dabei wird natürlich angenommen, daß man die Loxodrome vom Punkte P_1 nach P_2 hin durchläuft.

Auch die Meridiane und Breitenkreise sind Loxodromen; von diesen zwei besonderen Fällen abgesehen sind die Loxodromen transzendente Kurven, die sich asymptotisch den Polen der Kugel nähern. Sie sind übrigens *im allgemeinen* keineswegs kürzeste Linien auf der Kugel, denn solche Linien sind die größten Kreise; also nur der Äquator und die Meridiane sind zugleich Loxodromen und kürzeste Linien.

Betrachten wir z. B. den Unterschied zwischen der Bogenlänge der Loxodrome, die *Pernambuco* in Brasilien mit *Lissabon* verbindet und der Länge des durch diese Orte gelegten Bogens des größten Kreises.

Die geographische Länge von Pernambuco (P_1) ist $\vartheta_1 = 325^0 8'$ östl. L. von Greenwich, die geographische Breite $8^0 3'$ südl., daher $\psi_1 = 98^0 3'$; für Lissabon (P_2) ist $\vartheta_2 = 350^0 49'$, die geographische Breite $38^0 42'$ nördl., daher $\psi_2 = 51^0 18'$. Mit Hilfe von

$$\ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi_2 - \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi_1 = 2{,}30259 (\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi_2 - \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi_1) = -(\vartheta_2 - \vartheta_1) \operatorname{tg} \alpha$$

(vgl. (2) in Aufg. 24, S. 291) findet man für den Winkel α, unter dem die Loxodrome $P_1 P_2$ die Breitenkreise schneidet, den Betrag $62^0 52'$; die zugehörige Bogenlänge wird nach (1):

$$s = 0{,}9169\, a,$$

wo $a = 6370300$ m die Länge des Erdradius bedeutet.

Die Bogenlänge l des durch P_1 und P_2 gelegten Bogens des größten Kreises findet man nach einer Formel der sphärischen Trigonometrie gleich $0{,}9163\, a$. Der Unterschied der Bogenlängen s und l des Beispiels beträgt nur $0{,}0006\, a$, also rund 3800 Meter, das sind etwa $\frac{65}{1000}\,\%$ der kürzesten auf der Kugel gemessenen Entfernung l der beiden Orte.

Der Unterschied der auf der Loxodrome gemessenen Bogenlänge s und der Bogenlänge l auf dem größten Kreis ist wesentlich größer, wenn bei großem Längenunterschied die beiden Orte in höheren Breiten derselben Halbkugel liegen. So ist z. B. für die Orte *Kapstadt* ($\vartheta_1 = 18^0 29'$, $\psi_1 = 123^0 56'$) und *Melbourne* ($\vartheta_2 = 145^0$, $\psi_2 = 127^0 50'$)

$$s = 1{,}7868\, a = 11382 \text{ km},$$
$$l = 1{,}6182\, a = 10308 \text{ km};$$

der Unterschied beträgt hier $10{,}4\,\%$ der kürzesten auf der Kugel gemessenen Entfernung l.

Die beiden Beispiele zeigen, daß der Unterschied in der Länge des Weges bei der Seefahrt auf der Loxodrome oder bei der Fahrt auf dem größten Kreise (der sogenannten *orthodromischen* Seefahrt) in manchen Fällen kaum in Betracht kommt, in anderen Fällen ziemlich groß ist.

In der modernen Seefahrtskunst wird eine Berücksichtigung des orthodromischen *und* loxodromischen Kurses bevorzugt, indem man beide ineinandergreifen läßt. Wir wollen nicht versäumen, bei dieser Gelegenheit auf die Bedeutung der Loxodromen für die Herstellung *geographischer Karten* hinzuweisen. Der Geograph Gerhard Mercator (eigentlich Kremer, 1512—1594) hatte sich die Aufgabe gestellt, eine ebene Abbildung der Erdoberfläche anzufertigen, bei der den Loxodromen gerade Linien entsprechen. Auf einer solchen Karte „in Mercators Projektion“ (Seekarte) kann man den zwei Orte verbindenden

Schiffskurs als gerade Linie einzeichnen, und der Steuermann des Schiffes hat nun den Vorteil bei der Fahrt denselben Kompasstrich einhalten zu können. Diese Abbildung wird durch die Gleichungen

$$\xi = \operatorname{arc} \vartheta, \quad \eta = -\ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi \tag{3}$$

vermittelt, vermöge deren der Loxodrome

$$\ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi - \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \psi_0 = -(\vartheta - \vartheta_0) \operatorname{tg} \alpha \tag{4}$$

(vgl. (2) in Aufg. 24, S. 291) die Gerade

$$\eta - \eta_0 = (\xi - \xi_0) \operatorname{tg} \alpha \tag{5}$$

in einem System von rechtwinkligen Parallelkoordinaten ξ, η entspricht.

Die Abbildung (3) hat überdies den Vorzug *konform* oder *winkeltreu* zu sein, d. h. einer auf der ursprünglichen Fläche gelegenen Figur F entspricht in der Abbildung eine Figur F_1, die F ähnlich wird, wenn die Dimensionen von F nach Null streben.[1]) Den Breitenkreisen entsprechen parallele Geraden; die Polargegenden sind in der Abbildung sehr ausgedehnt, denn für geringe Poldistanzen ψ wird η sehr groß, für $\psi = 0$ wird $\eta = \infty$. Die Pole sind Ausnahmestellen, an denen eine winkeltreue Abbildung nicht mehr vorhanden ist.

Fig. 64.

26. Die Schnittkurve einer Kugel mit einem Kreiszylinder, der einen Kugelradius $OA = a$ zum Durchmesser seiner Basis hat, ist durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

der Kugel und des Zylinders bestimmt (Fig. 64). Bei Benutzung räumlicher Polarkoordinaten (vgl. Aufg. 23, S. 290) ergibt sich für die Schnittkurve die Parameterdarstellung

$$x = a \sin^2 \psi, \quad y = a \sin \psi \cos \psi, \quad z = a \cos \psi.$$

Man soll nun die Länge des im ersten Kugeloktanten gelegenen Teils der Schnittkurve berechnen.

1) Für das nähere Studium der konformen Abbildung der Kugel auf die Ebene verweisen wir auf G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 2. Bd. Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 75—89; auch die flächentreue Abbildung der Rotationsflächen wird daselbst (S. 40—53) ausführlich behandelt und ebenso wie die konforme Abbildung insbesondere für den Fall der Erdkugel durch zahlreiche interessante Figuren vor Augen geführt.

Mit Rücksicht auf $x^2 + y^2 - ax = 0$ findet nach Gleichung (1) in Aufg. 23, S. 290 zwischen ψ und ϑ die Beziehung $\sin^2\psi = \cos^2\vartheta$ statt, vermöge deren man nach Gleichung (2) in Aufg. 23, S. 290

$$s = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1 + \sin^2\psi}\, d\psi = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1 + \cos^2\vartheta}\, d\vartheta$$

erhält. Hierfür kann auch

$$s = a\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta$$

gesetzt werden, man hat daher das schon früher (Aufg. 10, S. 277 f.) behandelte vollständige Integral zweiter Gattung.

§ 18.

Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern.

1. Dreht sich die Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse, so entsteht eine *Rotationsfläche*. Durch diese Fläche und durch die zwei zur Achse rechtwinkligen Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ wird ein *Rotationskörper* begrenzt, dessen *Volumen* durch

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx. \tag{1}$$

gegeben ist. Hierbei sei $y = f(x)$ eine in dem Intervall von x_1 bis x_2 einschließlich der Grenzen eindeutige, endliche und stetige Funktion.

2. Der *Mantel* dieses Rotationskörpers hat den Flächeninhalt

$$O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy. \tag{2}$$

Ist die Gleichung der rotierenden Kurve von der Form $y^2 = \varphi(x)$, so schreibt man den Ausdruck für O zweckmäßiger in der Gestalt

$$O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{3}$$

Beispiele.

1. Volumen und Mantel des Körpers zu berechnen, der aus einem *Rotationsparaboloid* durch zwei zu dessen Achse rechtwinklige Ebenen herausgeschnitten wird.

Ist $y^2 = px$ die Gleichung der das Paraboloid durch Rotation um die x-Achse erzeugenden Parabel und sind $x = x_1$, $x = x_2$ die Gleichungen der Schnittebenen, so wird

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} p x \, dx = \tfrac{1}{2} p \pi (x_2^{\,2} - x_1^{\,2}),$$

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{px + \tfrac{1}{4} p^2} \, dx = \tfrac{4}{3} \pi \sqrt{p} \Big[(x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{3}{2}} \Big]_{x_1}^{x_2}.$$

Der Ausdruck für O läßt sich noch in eine andere Gestalt von bemerkenswerter Einfachheit bringen. Führt man nämlich wie in Aufg. 8, S. 275 durch die Substitution

$$\frac{2y}{p} = \frac{dx}{dy} = \mathfrak{Sin}\, u$$

hyperbolische Funktionen ein, so wird

$$O = \frac{1}{2} p^2 \pi \int_{u_1}^{u_2} \mathfrak{Sin}\, u \, \mathfrak{Cos}^2 u \, du = \frac{p^2 \pi}{6} \{ \mathfrak{Cos}^3 u_2 - \mathfrak{Cos}^3 u_1 \}.$$

Hierfür kann auch

$$O = \tfrac{1}{3} p \pi (\varrho_2 - \varrho_1)$$

gesetzt werden, wo ϱ_1 und ϱ_2 die Längen der den Punkten P_1 und P_2 zugehörigen Krümmungsradien bezeichnen, denn ein beliebiger Punkt der Parabel hat den Krümmungsradius

$$\varrho = \tfrac{1}{2} p \, \mathfrak{Cos}^3 u.$$

Bezogen auf ein System von Polarkoordinaten r, ϑ, das den Brennpunkt F der Parabel zum Pol, ihre Achse zur Polarachse hat, ist nämlich

$$r = \frac{p}{2(1 - \cos \vartheta)}$$

die Gleichung der Parabel. Ferner findet man für die Länge des Krümmungsradius ϱ eines beliebigen Parabelpunktes P den Ausdruck

$$\varrho = 2r : \cos \chi,$$

wo χ den Winkel zwischen dem Brennstrahl FP und der Normale PN von P bedeutet (Fig. 65).

Fig. 65.

Da nun bei der Parabel der Brennstrahl FP und die durch P parallel zur Achse gezogene Gerade gegen die Tangente TP von P unter gleichem Winkel $\alpha = 90^0 - \chi$ geneigt sind, ist auch $\sphericalangle TPF = \alpha$ und wie schon in Aufg. 8, S. 276 bemerkt wurde, $\sin \alpha = 1 : \mathfrak{Cos}\, u$. So folgt

$$\varrho = \frac{2r}{\cos \chi} = \frac{2r}{\sin \alpha} = 2r \, \mathfrak{Cos}\, u,$$

und mit Benutzung von

$$r = \frac{p}{2(1 - \cos\vartheta)} = \frac{p}{2(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{p}{4\sin^2\alpha}$$

ergibt sich die vorhin erwähnte Formel

$$\varrho = \tfrac{1}{2} p \,\mathfrak{Cos}^3 u \quad \text{sowie} \quad O = \tfrac{1}{3} p\pi(\varrho_2 - \varrho_1).$$

2. Die Oberfläche der Zone zu berechnen, die aus einem *Rotationsellipsoid* durch zwei zur Achse rechtwinklige Ebenen herausgeschnitten wird, und zwar unterscheide man zwei Fälle, je nachdem das Ellipsoid durch Rotation einer Ellipse um ihre große Achse (längliches Rotationsellipsoid) oder um die kleine Achse (abgeplattetes Rotationsellipsoid oder Sphaeroid) entstanden ist.

a) Ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse und $a > b$, so folgt im ersten Fall bei Anwendung der Formel (3), S. 295:

$$O = \frac{2\pi b}{a^2}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx,$$

und bei Einführung der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} : a$ wird

$$O = \frac{2\pi b}{a}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\,dx = \frac{\pi b}{a}\left[x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Die Oberfläche E des ganzen Ellipsoids ergibt sich für $x_1 = -a$, $x_2 = a$, und zwar erhält man

$$E = \frac{2\pi b}{a}\left\{a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right\} = 2\pi b\left\{b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right\}.$$

Bei Einführung eines Winkels γ durch $\sin\gamma = \varepsilon$ und $b : a = \cos\gamma$ wird

$$E = 2ab\pi\left(\cos\gamma + \frac{\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

b) Rotiert dieselbe Ellipse um die y-Achse, so entsteht ein Sphaeroid, dessen Zone mit Hilfe von

$$O = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + \left(x\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

zu berechnen ist. Man findet bei Einführung der linearen Exzentrizität $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:

$$O = \frac{2a\pi}{b^2}\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{b^4 + c^2 y^2}\,dy = \frac{a\pi}{b^2}\left[y\sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{b^4}{c}\ln\left(cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Die Oberfläche S des ganzen Sphaeroids ergibt sich für $y_1 = -b$, $y_2 = b$, und zwar erhält man

$$S = 2\pi a \left\{ \sqrt{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{bc + \sqrt{b^4 + b^2c^2}}{-bc + \sqrt{b^4 + b^2c^2}} \right\}$$

oder

$$S = 2\pi a \left\{ a + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{a + c}{a - c} \right\}.$$

Diese Formel geht bei Einführung von γ vermöge $\sin\gamma = c : a$, $\cos\gamma = b : a$ über in

$$S = 2ab\pi \left\{ \frac{1}{\cos\gamma} + \cot\gamma \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\}.$$

3. Welche Form muß eine *vertikale Säule von kreisförmigem Querschnitt* haben, wenn unter Berücksichtigung ihres Eigengewichts und einer am oberen Ende aufgelegten Last P jede Flächeneinheit eines jeden wagrechten Querschnitts gleich stark auf *Druck* beansprucht werden soll (Säule von gleichem Widerstand)?

Man betrachte die Säule als einen Rotationskörper und lege durch ihre Achse eine Ebene (xy-Ebene), die die Säule in zwei Meridiankurven trifft; die Säulenachse werde als y-Achse gewählt, eine wagrechte Gerade, die durch die Mitte der die Säule am oberen Ende begrenzenden Kreisfläche geht, als x-Achse. Es wird nun gefordert, daß in jedem wagrechten Querschnitt der Druck für je eine Flächeneinheit denselben Wert k habe.

Ein wagrechter Schnitt, der im Abstand y unter dem oberen Ende durch die Säule gelegt wird, hat den Flächeninhalt $x^2\pi$, erleidet daher den Druck $kx^2\pi$. Da dieser Druck durch das Gewicht P der aufgelegten Last und das Gewicht Q des über dem Querschnitt befindlichen Teiles der Säule verursacht wird, hat man die Gleichung

$$kx^2\pi = P + Q,$$

aus der durch Differentiation $2kx\pi\,dx = dQ$ hervorgeht, wobei

$$dQ = x^2\pi\,dy \cdot \gamma$$

ist, wenn γ das Gewicht der Volumeinheit des homogen angenommenen Säulenmaterials bezeichnet. Aus der Gleichung

$$2kx\pi\,dx = x^2\pi\gamma\,dy$$

folgt nun $\gamma dy = \frac{2k}{x}dx$ und durch Integration

$$\gamma y = 2k \ln x + C.$$

Die Integrationskonstante C erhält man bei Anwendung dieser Gleichung auf den obersten Säulenquerschnitt, der den Radius x_0 haben

möge; für ihn ist $y = 0$, somit $2k \ln x_0 + C = 0$. Die Meridiankurve der Säule (Fig. 66) hat daher die Gleichung

$$y = \frac{2k}{\gamma} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad \text{oder} \quad x = x_0 e^{\frac{\gamma y}{2k}}.$$

Der Radius x_1 der Säulenbasis ergibt sich hieraus für $y = l$, wenn l die Höhe der Säule bezeichnet; ferner folgt x_0 aus $k x_0^2 \pi = P$.

Bei Einführung der Flächeninhalte $F = x^2 \pi$ und $F_0 = x_0^2 \pi$ der zu den Radien x und x_0 gehörigen Querschnitte folgt aus der Gleichung der Meridiankurve:

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma y}{k}}.$$

In ähnlicher Weise würde man die Gestalt eines Rotationskörpers bestimmen, bei dem die Zugspannung in jedem Querschnitt dieselbe sein soll, während das obere Ende des Körpers befestigt oder aufgehängt ist (Schachtgestänge eines Bergwerks).[1])

Fig. 66.

Da die Herstellung einer Säule oder Stange von der vorhin berechneten Gestalt schwierig sein würde, setzt man meistens einige zylindrische oder prismatische Stücke zusammen, deren Querschnitte $F_1, F_2, \ldots$ man nach der Formel

$$F_i = F_0 e^{\frac{\gamma y_i}{k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

berechnet. Es sei z. B. folgende Aufgabe gestellt:

4. Ein Brückenpfeiler von 12 m Höhe, der außer seinem eigenen Gewicht noch eine Last von 90000 kg zu tragen hat, soll aus vier gleich hohen zylindrischen Stücken zusammengesetzt werden. Wie groß müssen die Querschnitte dieser Stücke sein, wenn das Gewicht γ der Volumeinheit des Baumaterials gleich 2,5 kg/cdm ist und die zulässige Druckspannung 30 kg/qcm beträgt? Die Flächeninhalte der Querschnitte sollen in qdm angegeben werden.

Hier ist $l = 120$ dm, $k = 3000$ kg/qdm. Der oberste Querschnitt F_0 folgt aus $F_0 \cdot 3000 = 90000$, nämlich $F_0 = 30$ qdm; für die folgenden findet man $F_1 = 30{,}759$ qdm, $F_2 = 31{,}538$ qdm, $F_3 = 32{,}337$ qdm, für die Basis $F_4 = 33{,}155$ qdm.

1) In diesem Zusammenhang kann auf die Herstellung verjüngter *Drahtseile* hingewiesen werden. Diese Verjüngung wird erreicht, indem man entweder die Anzahl der das Seil bildenden Drähte abschnittsweise verringert oder die Drahtdicke unter Beibehaltung der Anzahl der Drähte abnehmen läßt. Seile der letztgenannten Art, die aus Gußstahldraht von 180 kg/qmm Bruchfestigkeit angefertigt sind, werden in den über 1000 m tiefen Schächten der Silber- und Bleibergwerke in Přibram in Böhmen benutzt. Vgl. J. Hrabák, Die Drahtseile, Berlin 1902, S. 44; C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl., Leipzig 1908, S. 694.

5. Das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers zu bestimmen, der durch Rotation eines Bogens der *Kettenlinie* $y = m \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ um die x-Achse entsteht.

Hier wird

$$V = m^2\pi \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) dx = \frac{m^2\pi}{2}\left[m \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) + x\right]_{x_1}^{x_2}$$

(vgl. Aufg. 16, S. 68), und wenn man beachtet, daß $m\left[\operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$ nach Aufg. 5, S. 271 gleich der Länge des rotierenden Bogens $P_1 P_2$ oder gleich $\left[\sqrt{y^2 - m^2}\right]_{y_1}^{y_2}$ ist, ergibt sich

$$V = \frac{m\pi}{2}\left[y\sqrt{y^2 - m^2}\right]_{y_1}^{y_2} + \frac{m^2\pi}{2}(x_2 - x_1).$$

Rotiert insbesondere der sich vom Scheitel S der Kettenlinie (vgl. Fig. 33, S. 67) bis zum Punkt P_1 erstreckende Bogen s_1, so folgt

$$V_1 = \frac{m\pi}{2}(y_1 s_1 + m x_1).$$

Für den Mantel des bei Rotation des Bogens $P_1 P_2$ entstehenden Rotationskörpers ergibt sich

$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} m \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) dx, \quad \text{somit} \quad O = \frac{2}{m} V.$$

6. Der zu dem Intervall von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ gehörige Bogen der *gemeinen Zykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

rotiert um die x-Achse. Wie groß sind Volumen und Oberfläche dieses Rotationskörpers?

Hier wird

$$V = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8a^3\pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt,$$

$$O = 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt,$$

und wenn man an Stelle von t durch die Substitution $t = 2\tau$ eine neue Veränderliche τ einführt, ergibt sich

$$V = 16a^3\pi \int_0^{\pi} \sin^6 \tau \, d\tau, \quad O = 16a^2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \tau \, d\tau,$$

oder nach Aufg. 5, S. 74:

$$V = 32a^3\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^6\tau\,d\tau, \quad O = 32a^2\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^3\tau\,d\tau.$$

Nach Aufg. 76, S. 99 folgt also

$$V = 5a^3\pi^2, \quad O = \frac{64}{3}a^2\pi.$$

7. Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der im ersten Quadranten des Koordinatensystems gelegene Bogen der Evolute der Ellipse $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ um die x-Achse rotiert?

Für diese Evolute besteht nach Teil I, S. 156 die Parameterdarstellung

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t,$$

wo c die lineare Exzentrizität $\sqrt{a^2 - b^2}$ der Ellipse bedeutet. Man erhält

$$V = -\frac{3c^6\pi}{ab^2}\int\limits_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\sin^7 t\cos^2 t\,dt$$

(vgl. die Fußnote zu Aufg. 3, S. 248), woraus mit Hilfe der Substitution $t = 2\pi - \tau$ die Formel

$$V = \frac{3c^6\pi}{ab^2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^7\tau\cos^2\tau\,d\tau = \frac{3c^6\pi}{ab^2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin^7\tau - \sin^9\tau)\,d\tau$$

hervorgeht. Nach Aufg. 76, S. 99 folgt

$$V = \frac{16c^6\pi}{105ab^2}.$$

8. Schon in § 1, S. 32—34 wurde die Aufgabe behandelt, die Gestalt der Oberfläche einer Flüssigkeit zu bestimmen, die in einem feststehenden Gefäß von der Gestalt eines geraden Kreiszylinders rotiert. Die Flüssigkeit bildet ein Rotationsparaboloid, dessen Scheitel sich auf der Achse des Zylinders im Abstand z_0 vom Boden des Gefäßes befindet; die Gleichung dieses Paraboloids ist (vgl. S. 33)

$$z - z_0 = \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2g}, \tag{1}$$

wo ω die konstante Winkelgeschwindigkeit und g die Beschleunigung der Schwere bezeichnen. Dabei findet zwischen dem Radius a der Basis des Zylinders, der Höhe z_1, bis zu der die Flüssigkeit infolge der Rotation an der *Wand* des Gefäßes steigt, den Größen ω, g und z_0 der Zusammenhang statt:

Fig. 67.

$$z_1 - z_0 = \frac{a^2\omega^2}{2g}. \tag{2}$$

Man soll nun zeigen, daß bei dieser Rotation der Betrag $h - z_0$, um den der Scheitel des Paraboloids unter der Höhe h liegt, die der Flüssigkeits spiegel einnimmt, wenn keine Rotation stattfindet, gerade so groß ist, wie der Betrag $z_1 - h$, um den die Flüssigkeit bei der Rotation an der Wand des Gefäßes über die Höhe h emporsteigt (Fig. 67).

Das Volumen der Flüssigkeit beträgt $V = a^2\pi h$. Andrerseits ist auch

$$V = a^2\pi z_1 - \pi\int_{z_0}^{z_1}\frac{2g(z-z_0)}{\omega^2}\,dz,$$

denn die Gleichung der in der xz-Ebene liegenden Meridiankurve des Rotationsparaboloids ist

$$x^2 = \frac{2g(z-z_0)}{\omega^2}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte für V und nach Ausführung der Integration erhält man

$$a^2\pi h = a^2\pi z_1 - \pi\left[\frac{2g}{\omega^2}\left(\frac{1}{2}z^2 - z_0 z\right)\right]_{z=z_0}^{z=z_1}$$

oder

$$a^2 h = a^2 z_1 - \frac{g(z_1-z_0)^2}{\omega^2}, \tag{3}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$h = z_1 - \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0) = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_0) \tag{4}$$

oder

$$h - z_0 = z_1 - h.$$

Fig. 68.

9. Der sich vom Koordinatenanfang bis zum nächsten Scheitel S erstreckende Bogen der Sinuslinie $y = \sin x$ rotiert um die y-Achse. Wie groß ist das Volumen V des so entstehenden Rotationskörpers (Fig. 68)?

Hier wird

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi\int_0^1 (\arc\sin y)^2\,dy,$$

und wenn man wieder x einführt durch $x = \arcsin y$, $dy = \cos x\,dx$, folgt

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos x\,dx = \pi\left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

(vgl. Aufg. 6 und 5, S. 106). So ergibt sich

$$V = \pi\left(\tfrac{1}{4}\pi^2 - 2\right) = 0{,}4674\,\pi.$$

§ 19.

Doppelintegrale, dreifache Integrale und Berechnung des Volumens von Körpern (Kubatur).

1. Ist $f(x, y)$ eine innerhalb eines gewissen Bereiches $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $y_0 \leqq y \leqq y_1$ eindeutige und stetige Funktion von x und y, so gilt bei Berechnung des Doppelintegrals

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

die Formel

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{y_0}^{y_1}\left[\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\right]dy, \tag{2}$$

d. h. es ist gleichgültig, ob man erst nach y und dann nach x integriert, oder ob man umgekehrt verfährt; es ist dabei vorausgesetzt, daß die Integrationsgrenzen von x und y unabhängige Größen, also reine Zahlen sind.

2. Sind x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Parallelkoordinaten im Raume, bei denen die xy-Ebene horizontal liegen möge, während sich die positive Richtung der z-Achse vertikal nach oben erstreckt, so stellt das Integral V das Volumen eines Körpers dar, dessen in der xy-Ebene liegende *Basis* aus einem durch die Geraden $x = x_0$, $x = x_1$, $y = y_0$, $y = y_1$ gebildeten Rechteck besteht. Die *seitliche* Begrenzung des Körpers besteht aus den vertikalen Seitenflächen des Rechtflachs, das sich über der soeben erwähnten Basis erhebt; die *obere* Begrenzung des Körpers wird durch dasjenige Stück der gekrümmten Fläche $z = f(x, y)$ gebildet, das aus dieser Fläche durch die eben erwähnte seitliche Begrenzung herausgeschnitten wird (Fig. 69). Vorausgesetzt ist hierbei, daß dieses Flächenstück wirklich oberhalb der xy-Ebene liegt.

Fig. 69.

3. Sind bei dem Doppelintegral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0=\varphi_0(x)}^{y_1=\varphi_1(x)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3}$$

die Grenzen der Veränderlichen y Funktionen von x, nämlich $y_0 = \varphi_0(x)$ und $y_1 = \varphi_1(x)$, die als eindeutig und stetig vorausgesetzt werden mögen, so ist erst die Integration nach y, dann die nach x auszuführen.

Fig. 70.

Das Doppelintegral (3) stellt das Volumen eines Körpers dar, und zwar ist derselbe seitlich durch Wandungen begrenzt, die sich über einer in der xy-Ebene liegenden, durch die Geraden $x = x_0$, $x = x_1$ und die Kurven $y = \varphi_0(x)$, $y = \varphi_1(x)$ begrenzten Basis erheben. Bezüglich der oberen Begrenzung des Körpers gilt dasselbe wie in Regel **2**.

4. Wird die Basis des sonst in gleicher Weise wie in Regel **2** gegebilden Körpers durch eine geschlossene Kurve $ADBCA$ begrenzt, die sich nicht selbst schneidet (Fig. 70), so stellt sowohl

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y_0=\varphi_0(x)}^{y_1=\varphi_1(x)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

als auch

$$V = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\chi_0(y)}^{x=\chi_1(y)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{5}$$

das Volumen des Körpers dar. Dabei sind in (4) $x = b$ und $x = a$ die Gleichungen derjenigen Tangenten der Kurve $ADBCA$, die parallel zur y-Achse verlaufen und von dieser Achse den größten bzw. kleinsten Abstand haben. Die Grenzen $y_1 = \varphi_1(x)$ und $y_0 = \varphi_0(x)$ ergeben sich aus der Gleichung der Kurve $ADBCA$ durch Auflösung nach y. (Würde die Kurve z. B. durch den Kreis $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ gebildet, so wäre $y_1 = n + \sqrt{r^2 - (x - m)^2}$, $y_0 = n - \sqrt{r^2 - (x - m)^2}$). Entsprechendes gilt bei (5) für die Grenzen d, c, $\chi_1(y)$ und $\chi_0(y)$.

5. Werden in das Doppelintegral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dx\, dy \tag{6}$$

an Stelle von x und y neue Veränderliche u, v eingeführt durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \tag{7}$$

so geht das Doppelintegral (6) über in

$$V = \int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1} f(\varphi, \psi) |\Delta| \, du \, dv, \tag{8}$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ u & v \end{pmatrix} \tag{9}$$

die sogenannte *Funktionaldeterminante* von φ und ψ darstellt. Es ist hierbei angenommen, daß x und y sowie u und v bei der Integration von der unteren zur oberen Grenze wachsen; deshalb ist in (8) der absolute Wert $|\Delta|$ von Δ eingesetzt. Ferner ist angenommen, daß die Funktionen φ, ψ und ihre in (9) auftretenden partiellen Ableitungen innerhalb der in Betracht kommenden Variabilitätsbereiche stetig seien; auch soll Δ daselbst von Null verschieden sein. Endlich ist angenommen, daß jedem Wertepaar x, y vermöge (7) nur ein Wertepaar u, v zugehört und umgekehrt. Sind die unteren Grenzen u_0, v_0 des Integrals (8) konstant, so erhält man sie durch Auflösung der Gleichungen $x_0 = \varphi(u, v)$, $y_0 = \psi(u, v)$ nach u und v; ähnlich findet man die oberen Grenzen.

6. Auch der Inhalt F eines *ebenen* Flächenstücks läßt sich durch ein Doppelintegral darstellen; es besteht die Formel

$$F = \int\int dx\,dy, \tag{10}$$

wobei die Integrationsgrenzen von der Begrenzung der Fläche abhängen.

7. Das *Volumen eines Körpers* kann bei Benutzung von rechtwinkligen räumlichen Parallelkoordinaten x, y, z mit Hilfe des *dreifachen* Integrals

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz \tag{11}$$

berechnet werden, bei dem die Integrationsgrenzen von der Begrenzung des Körpers abhängen.

8. Werden in das Integral (11) an Stelle von x, y, z neue Veränderliche (krummlinige Koordinaten im Raume) durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \chi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w) \tag{12}$$

eingeführt, so geht das Integral (11) über in:

$$V = \int\int\int |\Delta| \, du\,dv\,dw, \tag{13}$$

wo

$$(14)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

die *Funktionaldeterminante* von φ, χ, ψ darstellt. Dabei ist angenommen, daß die Funktionen φ, χ, ψ und ihre in (14) auftretenden partiellen Ableitungen innerhalb des in Betracht kommenden Variabilitätsbereiches stetig seien; ferner soll Δ daselbst von Null verschieden sein. Endlich ist angenommen, daß jedem Wertsystem x, y, z vermöge (12) nur ein Wertsystem u, v, w zugehört und umgekehrt. Vgl. den entsprechenden Satz für Doppelintegrale in Regel **5**.

Beispiele.

1. Über dem in der xy-Ebene liegenden, durch die Geraden $x = k$, $x = l$, $y = m$, $y = n$ bestimmten Rechteck erhebt sich ein Rechtflach, das oben durch ein Stück der Oberfläche des elliptischen Paraboloids

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

begrenzt ist. Wie groß ist das Volumen des so begrenzten Körpers?

$$V = \int_{x=k}^{x=l}\int_{y=m}^{y=n}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy = \frac{(n-m)(l-k)}{3}\left\{\frac{k^2+kl+l^2}{a^2} + \frac{m^2+mn+n^2}{b^2}\right\}.$$

2. Das Volumen V eines Körpers zu bestimmen, der durch die Koordinatenebenen, die Ebene $x + y - 3 = 0$ und ein Stück der Oberfläche des elliptischen Paraboloids $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ begrenzt wird.

Hier ist

$$V = \int_{x=0}^{x=3}\int_{y=0}^{y=3-x}(4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx\,dy,$$

wobei man eine jede Integration geometrisch deute und sich klar mache, warum die Integrationsgrenzen die angegebenen Werte haben.[1])

Man findet $V = 45$ Volumeinheiten, also z. B. Kubikzentimeter, wenn die zu Grund gelegten Längeneinheiten Zentimeter sind.

1) Entsprechendes beachte man auch bei allen folgenden Aufgaben.

3. Wie groß ist das Volumen V des im Endlichen liegenden Körpers, der von dem elliptischen Paraboloid

$$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

durch die Ebene $x = k$ $(k > 0)$ abgeschnitten wird (Fig. 71).

Fig. 71.

In jedem der vier Oktanten des rechtwinkligen Koordinatensystems, in denen x positiv ist, liegt ein Viertel des Körpers; man erhält daher

$$\frac{1}{4} V = \int_{x=0}^{x=k} \int_{y=0}^{y=+b\sqrt{x}} \frac{c}{b} \sqrt{b^2 x - y^2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^k \left[\frac{y}{2} \sqrt{b^2 x - y^2} + \frac{b^2 x}{2} \arcsin \frac{y}{b\sqrt{x}} \right]_{y=0}^{y=+b\sqrt{x}} dx$$

(vgl. Aufg. 17, S. 192), also

$$\frac{1}{4} V = \frac{bc\pi}{4} \int_0^k x\, dx = \frac{1}{8}\, bck^2\pi$$

und $V = \frac{1}{2} bck^2\pi$.

4. Das Volumen V des *Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu bestimmen.

Das Ellipsoid wird durch die Koordinatenebenen in acht gleiche Teile geteilt, und man findet für einen dieser Oktanten das Volumen

$$\frac{1}{8} V = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

Da bei der Integration nach y die Größe x als konstant anzusehen ist, kann man vorübergehend zur Abkürzung

$$1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{gleich} \quad \frac{k^2}{b^2}$$

setzen und erhält alsdann

$$\frac{1}{8} V = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=+k} \frac{c}{b} \sqrt{k^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{c}{b} \int_0^a \left[\frac{y}{2} \sqrt{k^2 - y^2} + \frac{k^2}{2} \arcsin \frac{y}{k} \right]_{y=0}^{y=k} dx$$

oder nach Aufg. 17, S. 192:

$$\frac{1}{8}V = \frac{c}{b}\int_0^a \frac{k^2\pi}{4}\,dx = \frac{c\pi}{4b}\int_0^a \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}\,dx = \frac{bc\pi}{4a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{abc\pi}{6}, \quad \text{daher} \quad V = \frac{4}{3}abc\pi.$$

Im Falle $a = b = c$ geht das Ellipsoid in eine Kugel über, für deren Volumen man somit die bekannte Formel $V = \frac{4}{3}a^3\pi$ erhält.

5. Man bestimme nach Regel **6** den Inhalt der Fläche, die durch den vom Scheitel O bis zum Punkt $P_1(x_1, y_1)$ gehenden Bogen der *Parabel* $y^2 = px$, die Ordinate von P_1 und das zugehörige Stück der x-Achse begrenzt ist (Fig. 72).

Fig. 72.

Die Aufgabe soll auf zwei Arten gelöst werden, indem das eine Mal erst nach y, dann nach x integriert werden soll, das andere Mal in umgekehrter Reihenfolge. Schon in § 1 ist diese Fläche durch *einfache* Integration berechnet worden; die Aufgabe wird aber jetzt nochmals gestellt, da sie ein Beispiel abgibt, an dem man sich sehr leicht klar machen kann, wie die Festsetzung der Integrationsgrenzen durch die Reihenfolge der Integrationen bestimmt ist.

Wird erst nach y, dann nach x integriert, so ist

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1}\int_{y=0}^{y=+\sqrt{px}} dx\,dy;$$

wird erst nach x, dann nach y integriert, so folgt

$$F = \int_{y=0}^{y=y_1}\int_{x=\frac{y^2}{p}}^{x=x_1} dx\,dy.$$

Man findet $F = \frac{2}{3}x_1y_1$.

6. *Ein gerader Kreiszylinder wird in ein mit Wasser gefülltes Gefäß eingetaucht* und zwar derart, daß sich der Mittelpunkt M seiner Achse in der Tiefe c unter dem Wasserspiegel befindet, während die Achse selbst gegen die Vertikale unter dem Winkel α geneigt ist. Die Länge der Achse sei l, jede der beiden Kreisflächen, die den Zylinder begrenzen, habe den Radius a. Wie groß sind die auf diese Kreisflächen ausgeübten Drucke, wenn γ das Gewicht der Volumeinheit des Wassers bezeichnet.

Betrachten wir zunächst den auf die obere Kreisfläche k_1 ausgeübten Druck. Die Vertikalebene, in der die Achse des Zylinders liegt, wählen wir als xz-Ebene eines räumlichen Koordinatensystems, den Wasser-

spiegel als yz-Ebene, die Ebene des Kreises k_1 als xy-Ebene. Diese ist also gegen den Wasserspiegel unter dem Winkel α geneigt (Fig. 73).

Die Gleichung des die Fläche k_1 begrenzenden Kreises mit dem Mittelpunkt A ist

$$(x - m)^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0,$$

wo m eine Abkürzung für die Länge der Strecke $OA = (c - \frac{1}{2} l \cos\alpha) : \sin\alpha$ bedeutet. Für den auf die Fläche k_1 ausgeübten Druck p_1 ergibt sich alsdann (vgl. Aufg. 34, S. 18) das Doppelintegral

Fig. 73.

$$p_1 = \gamma \sin\alpha \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} x\, dx\, dy$$

wo $y_1 = -\sqrt{a^2 - (x-m)^2}$ und $y_2 = +\sqrt{a^2 - (x-m)^2}$ und $x_1 = m - a$ $x_2 = m + a$ die Integrationsgrenzen bedeuten. So folgt

$$p_1 = \gamma \sin\alpha \int_{m-a}^{m+a} 2x \sqrt{a^2 - (x-m)^2}\, dx,$$

und hieraus geht durch die Substitution $x - m = a \sin\varphi$ das Integral

$$p_1 = 2\gamma \sin\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (m + a \sin\varphi)\, a^2 \cos^2\varphi\, d\varphi$$

hervor. Hier ist

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

(vgl. Aufg. 6, S. 75 und Aufg. 76, S. 99) und

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

(vgl. Aufg. 6, S. 75), also ergibt sich schließlich

$$p_1 = a^2 m \gamma \pi \sin\alpha = \tfrac{1}{2} a^2 \gamma \pi (2c - l \cos\alpha).$$

In ähnlicher Weise erhält man für den Druck p_2 des Wassers auf die untere Kreisfläche k_2 den Ausdruck

$$p_2 = \tfrac{1}{2} a^2 \gamma \pi (2c + l \cos\alpha).$$

7. Zu zeigen, daß sich das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,\, y)\, dx\, dy$$

durch die Substitution

(1) $\quad x = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\xi, \quad y = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\eta$

in

$$\tfrac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi,\, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

verwandelt, wobei $\varphi(\xi, \eta)$ aus $f(x, y)$ dadurch hervorgeht, daß man in $f(x, y)$ an Stelle von x und y die angegebenen Werte einträgt.

Die Gleichungen (1) ergeben für $x = x_1$, $y = y_1$ die Werte $\xi = -1$, $\eta = -1$, für $x = x_2$, $y = y_2$ die Werte $\xi = 1$, $\eta = 1$. Vgl. Regel **5**, S. 304 f. sowie Aufg. 1 und 2, S. 73.

8. In welches Integral geht

$$V = \int\int f(x,\, y)\, dx\, dy$$

über bei Einführung von Polarkoordinaten in der xy-Ebene durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$?

Für die Funktionaldeterminante Δ findet man den Wert r, daher wird nach Regel **5**

$$V = \int\int f(r\cos\vartheta,\, r\sin\vartheta)\, r\, dr\, d\vartheta.$$

Die durch r, ϑ, z gebildeten Koordinaten heißen aus nahe liegendem Grunde *Zylinderkoordinaten.*

Man benutze das vorstehende Ergebnis in Aufg. 9—10.

9. Aus einer Kugel vom Radius a wird durch einen Kreiszylinder, dessen Achse (z-Achse) durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Körper herausgeschnitten; die Grundfläche des Zylinders habe den Radius b. Wie groß ist das Volumen des Körpers?

Ist $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ die Gleichung der Kugel, so hat der im ersten Oktanten des Koordinatensystems liegende Teil des Körpers das Volumen

$$\tfrac{1}{8} V = \int_{x=0}^{x=b}\int_{y=0}^{y=+\sqrt{b^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_{r=0}^{r=b}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\vartheta.$$

Die Integration nach r läßt sich leicht erledigen mit Hilfe der Substitution $a^2 - r^2 = u^2$. Man findet schließlich

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\left\{a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

10. Eine ähnliche Aufgabe wie zuvor, doch habe der Zylinder nunmehr die Gleichung $x^2 + y^2 - ax = 0$ (Fig. 74).

Der im ersten Oktanten des rechtwinkligen Koordinatensystems liegende vierte Teil des Körpers hat das Volumen

$$\frac{1}{4} V = \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} \int\limits_{r=0}^{r=a\cos\vartheta} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\vartheta = \frac{1}{3} a^3 \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin^3\vartheta)\, d\vartheta,$$

wobei man sich mit Hilfe der nebenstehenden Figur überzeugen möge, daß die angeschriebenen Grenzen des Doppelintegrals richtig sind. Man erhält

$$V = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right).$$

11. Die Fläche eines Halbkreises (Radius a) wird vertikal in eine Flüssigkeit eingetaucht, so daß der Durchmesser AB des Halbkreises im Flüssigkeitsspiegel liegt. Durch Radien ist diese Fläche derart in n Sektoren OAC_1, $OC_1C_2, \ldots OC_{n-1}B$ zu teilen (Fig. 75), daß die auf die einzelnen Sektoren ausgeübten Drucke einander gleich sind. Welche Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_k, \ldots \vartheta_{n-1}$ müssen diese Radien mit dem wagrechten Halbmesser OA bilden?

Fig. 74.

Fig. 75.

Der Gesamtdruck p, der auf die Fläche des Halbkreises ausgeübt wird, ist nach Aufgabe 15, S. 53 f. gleich $\frac{2}{3}a^3\gamma$, wo γ das Gewicht der Volumeinheit des Wassers bezeichnet. Sind $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \cdots = p_n$ die auf die einzelnen Sektoren ausgeübten Drucke, so folgt

$$(1) \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \frac{k}{n} p = \frac{2}{3} \frac{k}{n} a^3 \gamma.$$

Ferner ist der auf ein in der Tiefe $r \sin\vartheta$ unter dem Flüssigkeitsspiegel befindliches Flächenelement $r\,dr\,d\vartheta$ ausgeübte Druck gleich $r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta$; daher wird

$$(2) \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \gamma \int\limits_{r=0}^{r=a} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_k} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta = \frac{1}{3} a^3 \gamma (1 - \cos\vartheta_k)$$

oder

$$\frac{1}{3} a^3 \gamma (1 - \cos\vartheta_k) = \frac{2}{3} \frac{k}{n} a^3 \gamma$$

und

(3) $$\cos \vartheta_k = \frac{n - 2k}{n}.$$

Zur Konstruktion dieses Winkels teilt man den Durchmesser AB des Halbkreises durch die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_{n-1}$ in n gleiche Teile; die durch den Teilpunkt A_k rechtwinklig zu AB gezogene Gerade trifft die Peripherie im Endpunkt C_k des Radius OC_k, der mit OA den Winkel ϑ_k bildet. Offenbar ist nämlich (Fig. 75) $\cos \vartheta_k = OA_k : a$; ferner ist $OA_k = a - \frac{k}{n} \cdot 2a$, daher $\cos \vartheta_k = 1 - \frac{2k}{n}$ in Übereinstimmung mit (3).

12. Eine halbkreisförmige Fläche wird vertikal in eine Flüssigkeit eingetaucht, so daß der Durchmesser AB des Halbkreises wagrecht im Innern der Flüssigkeit, der Scheitel O in der Oberfläche liegt (Fig. 76). Der Radius des Halbkreises sei a, das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit sei γ. Wie groß ist der Druck p, den diese auf jede Seite der Fläche ausübt?

Wir wählen O als Anfangspunkt eines in der Ebene des Halbkreises gelegenen Systems von Polarkoordinaten r, ϑ, die in O gezogene Scheiteltangente als Polarachse. Ferner verbinden wir O mit A und B und fällen von O ein Lot OC auf die Gerade AB. Hierdurch wird die Fläche des Halbkreises in zwei gleich große zu den Sehnen OA und OB gehörige Kreissegmente und zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke OCA und OCB zerlegt. Bedeutet p_1 den Druck, den die Flüssigkeit auf eines der beiden Segmente ausübt, p_2 den Druck auf eines der beiden Dreiecke, so ist $p = 2p_1 + 2p_2$.

Fig. 76.

Ähnlich wie in Aufg. 11 folgt

$$p_1 = \gamma \iint r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta,$$

und zwar sind 0 und $2a \sin \vartheta$ die Grenzen bei der Integration nach r, denn $r = 2a \sin \vartheta$ ist die Gleichung des die Fläche begrenzenden Kreises; $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ sind die Grenzen bei der dann folgenden Integration nach ϑ. Man erhält hiernach

$$p_1 = \tfrac{8}{3} a^3 \gamma \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^4 \vartheta \, d\vartheta;$$

mit Benutzung der bei Aufg. 75, S. 98 angegebenen Reihe für $\sin^{2m} \vartheta$ ergibt sich $\sin^4 \vartheta = \frac{1}{8} \cos 4\vartheta - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta + \frac{3}{8}$, daher

$$p_1 = \frac{8}{3} a^3 \gamma \left[\frac{1}{32} \sin 4\vartheta - \frac{1}{4} \sin 2\vartheta + \frac{3}{8} \vartheta \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{2}{3} a^3 \gamma \left(\frac{3}{8}\pi - 1 \right).$$

Bei Berechnung von p_2 ist von demselben Integral auszugehen wie bei p_1, doch sind jetzt 0 und $a = \sin : \vartheta$ die Grenzen bei der Integration nach r, denn $r = a : \sin\vartheta$ ist die Gleichung der Geraden AB; $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ sind die Grenzen bei der dann folgenden Integration nach ϑ. Man erhält demnach

$$p_2 = \frac{1}{3}\, a^3 \gamma \int\limits_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{3}\, a^3 \gamma\,,$$

und für $p = 2(p_1 + p_2)$ ergibt sich

$$p = a^3 \gamma \left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3}\right).$$

13. Das schon in Aufg. 12, S. 227 f. und Aufg. 9, S. 242 berechnete Integral

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

läßt sich als Doppelintegral schreiben und dann mit Hilfe von Polarkoordinaten integrieren. Man kann nämlich auch

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy$$

setzen und erhält dann durch Multiplikation beider Ausdrücke für J, da die Integrationsgrenzen konstant sind:

$$J^2 = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int\limits_{r=0}^{r=\infty} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\vartheta\,,$$

wobei sich die Integrationsgrenzen für r und ϑ daraus ergeben, daß bei der Integration nach x und nach y die Grenzen jedesmal die Werte 0 und ∞ haben, daß also über einen ganzen Quadranten der Ebene zu integrieren ist. Mit Rücksicht auf

$$\int e^{-r^2}\, r\, dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2}$$

folgt

$$J^2 = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{und} \quad J = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

14. Die Formel zu beweisen

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(a^2x^2 + b^2y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4\,a\,b} \int\limits_0^\infty f(z)\, dz\,.$$

Durch die Substitution $ax = u$, $by = v$, geht das Doppelintegral nach Regel **5** über in

$$J = \frac{1}{ab} \int_0^\infty \int_0^\infty f(u^2 + v^2)\, du\, dv,$$

und durch die weitere Substitution $u = r\cos\vartheta$, $v = r\sin\vartheta$ erhält man (vgl. Aufg. 8)

$$J = \frac{1}{ab} \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} f(r^2) r\, dr\, d\vartheta = \frac{\pi}{2ab} \int_0^\infty f(r^2) r\, dr.$$

Setzt man $r^2 = z$, $2r\,dr = dz$, so folgt die zu beweisende Formel.

15. Mit Hilfe der Formel (11) in Regel **7**, S. 305 das Volumen V des Körpers zu bestimmen, der durch die xy-Ebene, den Kreiszylinder $x^2 + y^2 = a^2$ und den parabolischen Zylinder $y^2 = pz$ eingeschlossen wird ($p > 0$).

Im ersten Oktanten des Koordinatensystems liegt ein Viertel des ganzen Körpers. Wenn man beachtet, daß $z = 0$ und $z = y^2 : p$ die Grenzen bei der Integration nach z sind, folgt daher

$$\frac{1}{4} V = \int\int\int dx\, dy\, dz = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{y^2\, dx\, dy}{p} = \frac{1}{3p} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Mit Hilfe der Substitution $x = a\sin\vartheta$ ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{4} V = \frac{1}{3p} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} a^4 \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{a^4}{3p} \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{(vgl. Aufg. 76, S. 99)},$$

daher wird

$$V = \frac{1}{4} \frac{a^4 \pi}{p}.$$

16. Das Volumen des durch die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p = 1 \qquad (1)$$

eingeschlossenen Körpers zu berechnen, wo m, n, p positive gerade ganze Zahlen sind oder positive Brüche mit geraden Zählern und ungeraden Nennern.

Wegen der Symmetrie der Fläche mit Bezug auf die Koordinatenebenen beträgt das Volumen des im ersten Oktanten gelegenen Teiles des Körpers ein Achtel des Gesamtvolumens. Setzt man

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = x_1, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^n = y_1, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^p = z_1,$$

so tritt $x_1 + y_1 + z_1 = 1$ an die Stelle der Flächengleichung und es wird

$$(2) \quad \frac{1}{8} V = \int\int\int dx\, dy\, dz = \frac{abc}{mnp} \int\int\int x_1^{\frac{1}{m}-1} y_1^{\frac{1}{n}-1} z_1^{\frac{1}{p}-1} dx_1 dy_1 dz_1.$$

In dieses Integral werden nun durch die Substitutionen

$$x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \quad y_1 + z_1 = \xi\eta, \quad z_1 = \xi\eta\zeta,$$

also durch

$$x_1 = \xi(1-\eta), \quad y_1 = \xi\eta(1-\zeta), \quad z_1 = \xi\eta\zeta,$$

an Stelle von x_1, y_1, z_1 neue Veränderliche ξ, η, ζ eingeführt, wobei statt des früheren durch $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, $0 \leqq z \leqq c$ und durch (1) bestimmten Variabilitätsbereiches nunmehr der durch $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, $0 \leqq \zeta \leqq 1$ bestimmte Bereich tritt.

Für die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}$$

findet man den Wert $\Delta = \xi^2\eta$, so daß das ursprüngliche Integral (2) in

$$(3) \quad \frac{1}{8} V = \frac{abc}{mnp} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi^{m_1+n_1+p_1-1} \cdot \eta^{n_1+p_1-1} \cdot (1-\eta)^{m_1-1} \cdot \zeta^{p_1-1}(1-\zeta)^{n_1-1} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

übergeht, wenn man noch unter dem Integralzeichen die Brüche $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ bzw. durch m_1, n_1, p_1 ersetzt.

Die Integration nach ξ ergibt $\frac{1}{m_1+n_1+p_1}$, die Integrationen nach η und ζ führen auf B-Funktionen, denn nach Regel **1**, S. 238 ist

$$\int_0^1 \eta^{n_1+p_1-1} \cdot (1-\eta)^{m_1-1} \cdot d\eta = \mathrm{B}(n_1+p_1, m_1)$$

und

$$\int_0^1 \zeta^{p_1-1} \cdot (1-\zeta)^{n_1-1} \cdot d\zeta = \mathrm{B}(p_1, n_1);$$

daher ergibt sich

$$\frac{1}{8} V = \frac{abc}{mnp} \frac{1}{m_1+n_1+p_1} \mathrm{B}(n_1+p_1, m_1) \cdot \mathrm{B}(p_1, n_1),$$

und wenn man die B-Funktionen nach der Formel

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \text{(vgl. Aufg. 5, S. 241)}$$

durch Γ-Funktionen ersetzt, folgt

$$(4)\quad V = \frac{8abc}{mnp}\,\frac{1}{m_1+n_1+p_1}\,\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(n_1)\Gamma(p_1)}{\Gamma(m_1+n_1+p_1)} = \frac{8abc}{mn+np+pm}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{m})\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p})}.$$

17. Man kontrolliere hiernach den schon in Aufg. 4, S. 307f. gefundenen Ausdruck für das Volumen eines Ellipsoids.

Hier ist $m = n = p = 2$; mit Hilfe der Formel $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$ (Aufg. 4, S. 240) und mit Rücksicht auf $\Gamma(\frac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}$ (Aufg. 8, S. 242) findet man $V = \frac{4}{3}abc\pi$.

18. Mit Benutzung des Ergebnisses von Aufg. 16 soll das Volumen des von der Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

begrenzten Körpers bestimmt werden.

Hier ist $m = n = p = \frac{2}{3}$, daher wird

$$V = \frac{8abc}{12/9}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})},$$

woraus mit Hilfe von $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}$ die Gleichung

$$V = \frac{4}{35}abc\pi$$

hervorgeht.

19. Mit Hilfe der in Aufg. 16 angewandten Methode läßt sich das Integral

$$J = \int\!\!\int\!\!\int x^{q-1}y^{r-1}z^{s-1} f\left(\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p\right) dx\,dy\,dz,$$

das über alle positiven Werte x, y, z erstreckt wird, die die Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p \leqq 1$$

erfüllen, in

$$J = \frac{a^q b^r c^s}{mnp}\,\frac{\Gamma(\frac{q}{m})\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{p})}{\Gamma(\frac{q}{m}+\frac{r}{n}+\frac{s}{p})}\int_0^1 \xi^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}+\frac{s}{p}-1}\cdot f(\xi)\,d\xi$$

überführen. Auch läßt sich diese Formel auf n-fache Integrale ausdehnen.[1])

---

1) Vgl. G. Lejeune Dirichlet, Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, Bd. 8 (1839), S. 159f. = G. Lejeune Dirichlets Werke, herausgegeb. von L. Kronecker, Bd. 1, Berlin 1889, S. 380; Bericht über die Verhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Berlin, Jahrgang 1839, S. 24f. = Werke, Bd. 1, S. 389; Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Berlin, Jahrg. 1839, Berlin 1841, S. 67f. = Werke, Bd. 1, S. 399f.

20. Man soll in das Integral

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

räumliche Polarkoordinaten einführen durch die Gleichungen

$$x = r \sin\psi \cos\vartheta, \quad y = r \sin\psi \sin\vartheta, \quad z = r \cos\psi,$$

die schon in Aufg. 23, S. 290 näher erläutert wurden.

Für die Funktionaldeterminante ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ r & \psi & \vartheta \end{pmatrix} = r^2 \sin\psi,$$

daher wird

$$V = \iiint r^2 \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\vartheta.$$

21. Mit Hilfe dieses Ergebnisses bestimme man das Volumen des Sektors, der aus der Kugel $r = a$ durch einen Halbstrahl herausgeschnitten wird, der durch den Kugelmittelpunkt geht, und unter dem Winkel α gegen die positive Richtung der z-Achse geneigt sich um diese Achse dreht.

Man findet

$$V = \int\limits_{r=0}^{r=a} \int\limits_{\psi=0}^{\psi=\alpha} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} r^2 \sin\psi\, dr\, d\psi\, d\vartheta = \tfrac{1}{3} a^3 \cdot 2\pi \left[-\cos\psi\right]_0^\alpha = \tfrac{4}{3} a^3 \pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Weitere Beispiele für dreifache Integrale findet man in den noch folgenden Paragraphen 21 und 22.

§ 20.

Bestimmung des Inhalts gekrümmter Flächenstücke (Komplanation).

1. Durch die Gleichung $z = f(x, y)$, in der $f(x, y)$ eine eindeutige, stetige Funktion ist, sei eine Oberfläche gegeben. Wird nun über dem schon in Regel **3**, S. 304 oder in Regel **4**, S. 304 beschriebenen Bereich der xy-Ebene ein Rechtflach bzw. ein Zylinder errichtet, so schneidet dieser aus der Fläche ein Stück heraus, dessen Inhalt durch

$$O = \int\limits_{x=a}^{x=b} \int\limits_{y=\varphi_0(x)}^{y=\varphi_1(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{1}$$

bzw. durch

$$(2) \qquad O = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\chi_0(y)}^{x=\chi_1(y)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$$

gegeben ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x, y)$ und die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ für Werte x, y im Inneren und auf dem Rande des genannten Bereiches stetig seien. Mit Benutzung der allgemein gebräuchlichen Abkürzungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

wird der Integrand

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Die Formeln lassen sich, von den Grenzen abgesehen, auch in der Gestalt

$$(3) \qquad O = \int\int \frac{dx\, dy}{\cos \gamma}$$

schreiben, wo $dx\, dy : \cos \gamma$ den Inhalt des Elements bezeichnet, das an der Stelle $P(x, y, z)$ aus der gegebenen Oberfläche durch zwei unendlich nahe der yz-Ebene parallele Ebenen und zwei unendlich nahe, der xz-Ebene parallele Ebenen herausgeschnitten wird; $dx\, dy$ ist die Projektion dieses Flächenelements auf die xy-Ebene, γ der Winkel, den die im Punkt P der Fläche errichtete Normale mit der z-Achse bildet.

2. Ist die Oberfläche durch eine Parameterdarstellung

$$(4) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

gegeben und setzt man zur Abkürzung

$$(5) \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} y\, z \\ u\, v \end{pmatrix} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = A, \quad \begin{pmatrix} z\, x \\ u\, v \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = B, \\ \begin{pmatrix} x\, y \\ u\, v \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = C, \end{cases}$$

so hat ein durch die Parameterlinien $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$ begrenztes Stück der Fläche den Inhalt

$$(6) \qquad O = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

eine Gleichung, die man unter Benutzung der Abkürzungen

$$(7) \qquad \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

auch in der Form

$$(8) \qquad O = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

schreiben kann.

Beispiele.

1. Über dem durch die x- und y-Achse sowie durch die Geraden $x = 3$, $z = 0$ und $y = 6$, $z = 0$ begrenzten Rechteck der xy-Ebene erhebt sich ein Rechtflach. Wie groß ist der Inhalt des durch die vertikalen Seitenwände des Rechtflachs aus dem Kegel $z^2 = 2xy$ herausgeschnittenen Flächenstücks?

Hier wird

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{(x+y)^2}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy},$$

daher

$$O = \int_{x=0}^{x=3}\int_{y=0}^{y=6} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx\, dy = \sqrt{12}\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 36.$$

2. Den Gesamtinhalt O der beiden Flächenteile zu bestimmen, die aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ durch den Zylinder $x^2 + y^2 = b^2$, wo $b < a$ sei, herausgeschnitten werden. Vgl. Aufg. 9, S. 310.

Hier ist $1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2}{z^2}$, daher folgt

$$\frac{1}{8} O = a \int\int \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

oder bei Einführung der Polarkoordinaten durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$:

$$\frac{1}{8} O = a \int_{r=0}^{r=b}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} \frac{r\, dr\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{a\pi}{2}\left[\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^b,$$

somit

$$O = 4a\pi\left\{a - \sqrt{a^2 - b^2}\right\}.$$

3. Eine ähnliche Aufgabe wie zuvor, doch habe der Zylinder nunmehr die Gleichung $x^2 + y^2 - ax = 0$. Vgl. Aufg. 10, S. 311.

Man findet

$$\frac{1}{4} O = a \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi}\int_{r=0}^{r=a\cos\vartheta} \frac{r\, dr\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad O = 2a^2\pi - 4a^2.$$

4. Den Inhalt des Flächenstücks zu berechnen, das aus der *Schraubenfläche* $z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ durch die Ebenen $z = 0$, $z = m\pi$ und den Kreis-

zylinder $x^2 + y^2 = a^2$ herausgeschnitten wird; hierbei ist $m\pi$ die halbe Ganghöhe der Schraubenfläche.

Man findet

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{x^2 + y^2 + m^2}{x^2 + y^2};$$

bei Einführung der Polarkoordinaten folgt daher

$$\frac{1}{4} O = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{1}{2}\pi} \sqrt{r^2 + m^2}\, dr\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2 + m^2} + \frac{m^2}{2}\ln\left(r + \sqrt{r^2 + m^2}\right)\right]_{r=0}^{r=a},$$

somit

$$O = \pi\left\{a\sqrt{a^2 + m^2} + m^2 \ln\frac{a + \sqrt{a^2 + m^2}}{m}\right\}.$$

5. Man soll in das Integral

$$O = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

räumliche Koordinaten einführen durch die Gleichungen

$$x = r\sin\psi\cos\vartheta, \quad y = r\sin\psi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\psi,$$

wobei $r = f(\psi, \vartheta)$ die Gleichung der Oberfläche in Polarkoordinaten sei.

Die in Regel **2**, S. 318 eingeführten Größen A, B, C haben nun die Werte

$$A = \begin{pmatrix} y & z \\ \psi & \vartheta \end{pmatrix} = r\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\sin\vartheta - r\frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta + r^2\sin^2\psi\cos\vartheta,$$

$$B = \begin{pmatrix} z & x \\ \psi & \vartheta \end{pmatrix} = -r\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\cos\vartheta - r\frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\psi\cos\psi\sin\vartheta + r^2\sin^2\psi\sin\vartheta,$$

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ \psi & \vartheta \end{pmatrix} = r\frac{\partial r}{\partial\psi}\sin^2\psi + r^2\sin\psi\cos\psi;$$

man findet alsdann

$$A^2 + B^2 + C^2 = r^4\sin^2\psi + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\sin^2\psi + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)^2,$$

daher wird

$$O = \iint \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2 + r^2\right\}\sin^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial\vartheta}\right)^2}\, r\, d\psi\, d\vartheta.$$

6. Den Flächeninhalt des *Kegelmantels* zu berechnen, der entsteht, wenn man den Koordinatenanfang mit allen Punkten der in der Ebene $z = c$ gelegenen Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

verbindet.

Für den Kegel besteht die Parameterdarstellung

(1) $$x = au\cos v, \quad y = bu\sin v, \quad z = cu.$$

Hierbei sind die Parameterlinien $u =$ konst die Schnittkurven des Kegels mit solchen Ebenen, die parallel zur Basis $z = c$ gelegt sind; die Kurven $v =$ konst sind die Erzeugenden des Kegels.

Man findet

$$A = -bcu\cos v, \quad B = -cau\sin v, \quad C = abu,$$

daher wird

$$O = \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=2\pi}\sqrt{b^2c^2\cos^2 v + c^2a^2\sin^2 v + a^2b^2}\, u\,du\,dv$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cos^2 v + \frac{c^2}{b^2}\sin^2 v + 1}\,dv$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{c^2+a^2}{a^2}\cos^2 v + \frac{c^2+b^2}{b^2}\sin^2 v}\,dv.$$

Schreibt man diesen Ausdruck in der Form

$$O = \frac{1}{2}\sqrt{ab}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{ab(c^2+a^2)}{a^2}\cos^2 v + \frac{ab(c^2+b^2)}{b^2}\sin^2 v}\,dv$$

und beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2 v + \beta^2\sin^2 v}\,dv$$

den Umfang einer durch $x = \alpha\sin v$, $y = \beta\cos v$ gegebenen Ellipse darstellt, so folgt, daß der in der angegebenen Weise begrenzte Mantel des Kegels (1) inhaltsgleich ist dem Mantel eines geraden Zylinders, der die Ellipse mit den Halbachsen

$$\alpha = \sqrt{\frac{b(a^2+c^2)}{a}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a(b^2+c^2)}{b}}$$

zur Basis und eine Strecke von der Länge $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ zur Höhe hat.

7. Die Oberfläche des *Ellipsoids*

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu berechnen.

Nach Regel **1**, S. 317 wird

(2) $$O = \iint \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,dx\,dy,$$

wo für z der Wert einzutragen ist, der sich aus der Gleichung des Ellipsoids ergibt; man erhält alsdann ein Doppelintegral, das in bezug auf x *und* y ein elliptisches Integral ist. Man gelangt einfacher auf folgendem Wege zum Ziel.

Ist γ der Winkel, den die im Punkt $P(x, y, z)$ einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ errichtete und sich in das positive Gebiet des Raumes erstreckende Normale mit der positiven Richtung der z-Achse bildet, so hat man nach Teil I, S. 46:

$$\cos\gamma = \frac{f_3}{+\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}$$

und im vorliegendem Fall

$$\cos\gamma = \frac{z}{+c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt gemeinsam mit (1) den geometrischen Ort aller Punkte des Ellipsoids dar, für die $\cos\gamma$ einen und denselben Wert hat. Durch Elimination von z aus (1) und (3) erhält man die Gleichung der Projektion dieses Ortes auf die xy-Ebene, nämlich eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^4}(a^2\sin^2\gamma + c^2\cos^2\gamma) + \frac{y^2}{b^4}(b^2\sin^2\gamma + c^2\cos^2\gamma) = \sin^2\gamma. \tag{4}$$

Einem anderen Winkel $\gamma_1 > \gamma$ entspricht auf dem Ellipsoid eine andere Kurve, deren Projektion auf die xy-Ebene wieder eine Ellipse ist; ihre Gleichung ergibt sich aus (4) offenbar durch Änderung von γ in γ_1. Man kann leicht zeigen, daß die Halbachsen dieser neuen Ellipse größer sind als bei der Kurve (4), so lange $\gamma_1 > \gamma$ ist. Zwei Werten γ und $\gamma + d\gamma$ entsprechen auf dem Ellipsoid Kurven, die daselbst einen ringförmigen unendlich schmalen Streifen begrenzen, dessen Projektion auf die xy-Ebene durch die Ellipse (4) und durch die dem Werte $\gamma_1 = \gamma + d\gamma$ entsprechende Ellipse begrenzt wird.

Da die Kurve (4) den Flächeninhalt

$$F = \frac{a^2 b^2 \pi \sin^2\gamma}{+\sqrt{a^2\sin^2\gamma + c^2\cos^2\gamma}\sqrt{b^2\sin^2\gamma + c^2\cos^2\gamma}} \tag{5}$$

hat, ist $dF = \frac{dF}{d\gamma}d\gamma$ der Inhalt der zwischen den soeben erwähnten Ellipsen gelegenen ebenen Fläche und $dF : \cos\gamma$ der Inhalt des entsprechenden auf dem Ellipsoid gelegenen ringförmigen Streifens. Um den Flächeninhalt $\frac{1}{2}O$ der oberhalb der xy-Ebene liegenden Ellipsoidhälfte zu erhalten muß man alle diese Streifen summieren, d. h. man hat $dF : \cos\gamma$ zu integrieren, und zwar innerhalb der Grenzen $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, denn dem Werte $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ entspricht die in der xy-Ebene ge-

legene, durch eine Ellipse mit den Halbachsen a, b gebildete Begrenzung der Ellipsoidhälfte, dem Werte $\gamma = 0$ der höchste, auf der z-Achse liegende Punkt $z = c$ des Ellipsoids. Für die ganze Oberfläche erhält man also:

$$(6) \qquad O = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dF}{\cos\gamma} = 2\left[\frac{F}{\cos\gamma}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F \cdot d\frac{1}{\cos\gamma}.$$

Zur Berechnung dieses Ausdrucks setzen wir unter der Voraussetzung, daß $a > b > c$ sei:

$$(7) \qquad +\sqrt{a^2 - c^2} = a\alpha, \quad +\sqrt{b^2 - c^2} = b\beta, \quad \beta^2 : \alpha^2 = k^2$$

und führen an Stelle von γ durch $\alpha \cos\gamma = \sin\varphi$ eine neue Veränderliche φ ein. Alsdann folgt

$$(8) \qquad O = 2ab\pi\left[\frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi}{\alpha \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\right]_{\varphi = \arcsin\alpha}^{\varphi = 0}$$
$$+ 2ab\pi \int_{\varphi = \arcsin\alpha}^{\varphi = 0} \frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi}{\alpha \sin^2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

und hier ist das in der rechten Seite der Gleichung vorkommende Integral, das mit J bezeichnet werden möge, in die Summe

$$(9) \qquad J = \frac{\alpha^2 k^2 - 1}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \alpha \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

zerlegbar. Bei Anwendung der Methode der teilweisen Integration auf das letzte Integral erhält man unter Benutzung der Formel $d\cot\varphi = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$:

$$(10) \qquad J = \frac{\alpha^2 k^2 - 1}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \alpha \cot\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$
$$- \alpha k^2 \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

und wenn man hier

$$\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

addiert und subtrahiert, folgt nach leichter Reduktion

$$(11) \qquad J = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \alpha \cot\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$
$$- \alpha \int \frac{1 - k^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Die Gleichung (8) geht nunmehr über in

$$(12)\quad \frac{O}{2ab\pi} = \left[\frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \alpha\cot\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right]_{\varphi=\arcsin\alpha}^{\varphi=0}$$

$$+\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\int\limits_{\arcsin\alpha}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \alpha\int\limits_{\arcsin\alpha}^{0}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \left[\frac{\sin\varphi\,(1-\alpha^2-\alpha^2k^2\cos^2\varphi)}{\alpha\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin\alpha}$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\int\limits_{0}^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \alpha\int\limits_{0}^{\arcsin\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

wobei das erste Glied der rechten Seite für die untere Grenze $\varphi = 0$ verschwindet, während es für die obere Grenze mit Rücksicht auf $\sin\varphi = \alpha$, $\cos^2\varphi = 1 - \alpha^2$ den Wert

$$\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)} = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = c^2 : ab$$

annimmt. Man erhält schließlich

$$(13)\quad O = 2c^2\pi + \frac{2b\pi}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[c^2F(k,\varphi) + (a^2-c^2)\,E(k,\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin\alpha},$$

wo F und E die schon in Regel **7**, S. 210 erwähnten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bedeuten, während nach (7)

$$k^2 = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},\quad \arcsin\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$$

ist.

§ 21.

Bestimmung der Masse nicht homogener geometrischer Gebilde; Massenmittelpunkt (Schwerpunkt).

In der Physik wird vielfach die Anschauung benutzt, daß eine Kurve oder Fläche mit Masse belegt sei, deren Dichte sich in gewisser Weise von einer Stelle zur anderen ändert, also eine Funktion des Ortes ist. Dabei pflegt der Begriff Masse häufig in einem allgemeineren Sinne als gewöhnlich aufgefaßt zu werden, indem man hierunter auch ein magnetisch oder elektrisch wirkendes Agens versteht, das sich über die Kurve oder Fläche erstreckt. Auch die Temperatur kann als eine Funktion des Ortes in Betracht kommen. In der rein geometrischen Theorie sind die Massen lediglich Zahlen, die erst in den Anwendungen gedeutet werden.

Die *Dichte* eines unendlich kleinen rechteckigen Flächenstücks $dx\,dy$, das sich an der Stelle P der xy-Ebene befindet, ist alsdann das Verhältnis der in dem Flächenstück befindlichen Masse zu seinem Inhalt; der Grenzwert dieses Verhältnisses ist die Dichte an der Stelle P. Hat dieses Verhältnis für jede Stelle denselben Wert, so nennt man die Fläche (allgemeiner das betreffende geometrische Gebilde) *homogen* mit Masse erfüllt oder kürzer homogen.

Wir wollen uns im folgenden auf eine ebene Fläche oder einen mit Masse erfüllten Körper beschränken. Alsdann gelten die Regeln:

1. Die Masse einer ebenen Fläche, deren Dichte γ eine Funktion des Ortes, $\gamma = \gamma(x, y)$, ist, wird durch das Doppelintegral

$$M = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \int_{y=\varphi_0(x)}^{y=\varphi_1(x)} \gamma(x, y)\, dx\, dy$$

dargestellt, wenn die Fläche durch die Kurven $y = \varphi_0(x)$, $y = \varphi_1(x)$ und die Geraden $x = x_0$, $x = x_1$ begrenzt ist.

2. Die Masse eines Körpers, dessen Dichtigkeit γ eine Funktion des Ortes, $\gamma = \gamma(x, y, z)$, ist, wird durch das dreifache Integral

$$M = \iiint \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

dargestellt, bei dem die Integrationsgrenzen von der Begrenzung des Körpers abhängen.

3. In der Mechanik wird gezeigt, daß ein System von gleichgerichteten Parallelkräften, die auf einen Körper wirken, durch eine einzige Mittelkraft (Resultante) ersetzt werden kann, die mit den Parallelkräften gemeinsame Richtung hat und an Größe ihrer Summe gleich ist. Auch die auf die einzelnen Massenelemente eines Körpers wirkenden Kräfte der Schwere können als parallel angesehen werden, denn der Mittelpunkt der Erde, nach dem diese Kräfte gerichtet sind, kann als unendlich fern angenommen werden, zumal man es fast immer mit solchen Körpern zu tun hat, deren Größe, verglichen mit ihrer Entfernung vom Erdmittelpunkt, als verschwindend klein aufzufassen ist. Der Angriffspunkt der Mittelkraft der einzelnen auf die Massenelemente des Körpers wirkenden Schwerkräfte heißt der *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* des Körpers.

Man kann diesen Punkt auch noch in anderer Weise definieren. Bekanntlich versteht man unter dem *statischen* oder *linearen Moment* eines Massenelementes dm in bezug auf eine Ebene das Produkt aus der Masse dieses Elementes und seinem Abstand von der Ebene. So ist z. B. $x \cdot dm$ das statische Moment von dm in bezug auf die yz-Ebene, falls x den Abstand des Elementes dm von dieser Ebene bezeichnet. Durch Summieren der statischen Momente aller einen Körper erfüllenden

Massenelemente erhält man das statische Moment des ganzen Körpers für die betreffende Ebene. Ist $\gamma = \gamma(x, y, z)$ die Dichte an der Stelle x, y, z, so wird $dm = \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ und

$$\iiint x\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

stellt das Moment des Körpers in bezug auf die yz-Ebene dar.

Der *Schwerpunkt* S eines Körpers ist nun dadurch definiert, daß er in bezug auf jede beliebige Ebene e des Raumes dasselbe statische Moment wie der ganze Körper hat, vorausgesetzt, daß man sich die Gesamtmasse M des Körpers in S vereinigt denkt.

Wählt man als Ebene e nacheinander die drei Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so erhält man zur Bestimmung der Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes die drei Gleichungen

$$M\xi = \iiint x\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad M\eta = \iiint y\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M\zeta = \iiint z\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Natürlich sind den Integralen noch Grenzen beizufügen, die von der Gestalt des Körpers abhängen.

4. Erfüllen die Massenelemente eine *ebene Fläche*, so ist deren Schwerpunkt S dadurch definiert, daß er in bezug auf jede Gerade g der Ebene dasselbe statische Moment wie die ganze Fläche hat, vorausgesetzt, daß man sich die Gesamtmasse M der Fläche in S vereinigt denkt.

Wählt man als Gerade g die x- oder y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, das in derselben Ebene liegt wie die Fläche, und bezeichnet $\gamma = \gamma(x, y)$ die Dichte an der Stelle x, y, so erhält man zur Bestimmung der Koordinaten ξ, η des Schwerpunktes die Gleichungen

$$M\xi = \iint x\, \gamma(x, y)\, dx\, dy, \quad M\eta = \iint y\, \gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

5. Erfüllen die Massenelemente einen *Bogen* $P_1 P_2$ einer ebenen Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und ist $\gamma = \gamma(x)$ die Dichte an der Stelle mit der Abszisse x, so sind die Koordinaten ξ, η des Schwerpunktes dieses Kurvenbogens bestimmt durch

$$M\xi = \int_{x_1}^{x_2} x\, \gamma(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad M\eta = \int_{x_1}^{x_2} y\, \gamma(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

wobei

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

6. Bei homogener Dichte der in Regel **3** bis **5** erwähnten geometrischen Gebilde wird die Funktion γ eine Konstante, die auch in M als Faktor enthalten ist und sich daher in den betreffenden Formeln wegheben läßt. Anstelle von M tritt alsdann in Regel **3** das Volumen V, in Regel **4** der Flächeninhalt F, in Regel **5** die Bogenlänge s.

Beispiele.

1. Die Masse eines materiellen *Kreiskegels* zu bestimmen, dessen Dichte proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes von einer durch die Spitze parallel zur Basis gelegten Ebene und in der Einheit des Abstandes gleich $\varkappa$ ist. Der Kegel entstehe dadurch, daß eine gegen seine Achse unter dem Winkel α geneigte Gerade um diese Achse rotiert; die Höhe des Kegels sei h.

Wählt man die x-Achse als Achse, den Koordinatenanfang als Spitze des Kegels, so ist $y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ dessen Gleichung und man erhält nach Regel **2**

$$M = \iiint \varkappa x^n \, dx \, dy \, dz = 2\varkappa \iint x^n \sqrt{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2} \, dx \, dy.$$

Bei der Integration nach y sind $-x \operatorname{tg} \alpha$ und $+x \operatorname{tg} \alpha$ die Integrationsgrenzen; am besten führt man an Stelle von y durch $y = x \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$ eine neue Veränderliche φ ein und erhält nun $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ als Integrationsgrenzen. Man findet

$$\int_{-x \operatorname{tg} \alpha}^{+x \operatorname{tg} \alpha} \sqrt{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2} \, dy = x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

daher wird

$$M = \varkappa \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^h x^{n+2} \, dx = \frac{\varkappa \pi h^{n+3} \operatorname{tg}^2 \alpha}{n+3}.$$

2. Die Fläche einer *Ellipse* mit den Halbachsen a, b ist derart mit Masse belegt, daß die Dichte proportional dem Abstand von der Achse $2a$ und in der Einheit des Abstandes gleich $\varkappa$ ist. Wie groß ist die Gesamtmasse M der Ellipsenfläche?

Bei Berücksichtigung der oberen Halbellipse findet man

$$\frac{1}{2} M = \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=0}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \varkappa y \, dx \, dy = \frac{\varkappa b^2}{2a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx,$$

somit wird die Masse der ganzen Ellipse

$$M = \tfrac{4}{3} a b^2 \varkappa.$$

3. Die Dichte einer *Kugel* vom Radius a ist proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes vom Mittelpunkt ($n \geqq -2$) und in der Einheit des Abstandes gleich $\varkappa$. Die Masse der Kugel zu bestimmen.

Unter Benutzung des Ergebnisses von Aufg. 20, S. 317 findet man

$$M = \int\limits_{r=0}^{r=a} \int\limits_{\psi=0}^{\psi=\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \varkappa r^{n+2} \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\vartheta = \frac{4\pi\varkappa a^{n+3}}{n+3}.$$

Insbesondere im Falle $n = -2$ wird $M = 4\pi\varkappa a$.

Fig. 77.

4. Den Schwerpunkt des bei einem *Kreis* vom Radius a zum Zentriwinkel α gehörigen *Bogens* AB zu bestimmen (Fig. 77).

Ist die x-Achse die Halbierungslinie des Zentriwinkels α des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ und $l = 2a \sin \frac{1}{2}\alpha$ die Länge der zum Bogen AB gehörigen Sehne, so ist die Ordinate η des Schwerpunktes, wie aus Gründen der Symmetrie sofort folgt, gleich Null; seine Abszisse ist nach Regel **5** und **6**:

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} \int x \, ds = \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} \int\limits_{y=-\frac{1}{2}l}^{y=\frac{1}{2}l} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy = \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} \int\limits_{y=-\frac{1}{2}l}^{y=\frac{1}{2}l} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy,$$

wobei $\operatorname{arc}\alpha$ die Länge des Kreisbogens AB bedeutet. Man erhält

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} \int\limits_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} a \, dy = \frac{al}{\operatorname{arc}\alpha} \quad \text{und} \quad \xi : a = l : \operatorname{arc}\alpha,$$

d. h.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf der Halbierungslinie des zugehörigen Zentriwinkels α derart, daß sich sein Abstand vom Kreismittelpunkt zum Radius verhält wie die Länge der zu α gehörigen Sehne zur Länge des Kreisbogens.

5. Bei der *Kettenlinie* $y = m \,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ den Schwerpunkt zu bestimmen, und zwar a) für den vom Scheitel S bis zum Punkte P_1 gezogenen Bogen, b) für einen beliebigen Bogen $P_1 P_2$ (vgl. Fig. 33, S. 67).

a) Es sei s_1 die in Aufg. 5, S. 271 bestimmte Länge des Bogens SP_1; ferner seien x_1, y_1 die Koordinaten von P_1 und ξ_1, η_1 die Koordinaten des Schwerpunktes des Bogens SP_1. Alsdann folgt

$$\xi_1 = \frac{1}{s_1} \int\limits_0^{x_1} x \,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx = \frac{1}{s_1} \left[m x \,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) - \int m \,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) dx \right]_{x=0}^{x=x_1}$$

$$= \frac{m}{s_1} \left\{ x_1 \,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x_1}{m}\right) - m \,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x_1}{m}\right) + m \right\},$$

und wenn man beachtet, daß $m \operatorname{Sin}\left(\frac{x_1}{m}\right) = s_1$ (vgl. Aufg. 5, S. 271) und $m \operatorname{Cof}\left(\frac{x_1}{m}\right) = y_1$ ist, ergibt sich

$$\xi_1 = x_1 - \frac{m}{s_1}(y_1 - m).$$

Ferner wird

$$\eta_1 = \frac{m}{s_1}\int_0^{x_1} \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) dx = \frac{m^2}{s_1}\left[\frac{1}{4}\operatorname{Sin}\left(\frac{2x}{m}\right) + \frac{x}{2m}\right]_{x=0}^{x=x_1}$$

(vgl. Aufg. 16, S. 68), oder

$$\eta_1 = \frac{m^2}{s_1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)\operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{x}{2m}\right]_{x=0}^{x=x_1} = \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{m x_1}{s_1}\right).$$

Bei Einführung des Winkels α_1, den die in P_1 gezogene Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, wird $s_1 = m \operatorname{tg} \alpha_1$ (vgl. Aufg. 5, S. 271), daher

$$\xi_1 = x_1 - (y_1 - m)\cot\alpha_1, \quad \eta_1 = \tfrac{1}{2}(y_1 + x_1 \cot\alpha_1).$$

Diese Formeln liefern sofort eine einfache Konstruktion der Koordinaten des Schwerpunktes des Bogens SP_1. Offenbar ist ξ_1 gleich der Abszisse des Schnittpunktes der im Scheitel S und in P_1 gezogenen Tangenten der Kettenlinie; wie diese Tangenten konstruiert werden, ist schon in Teil I, S. 48 gezeigt worden. Die Ordinate η_1 ist offenbar halb so groß wie der Abschnitt, den die Normale von P_1 auf der y-Achse abschneidet.

b) Ist $P_2(x_2, y_2)$ ein anderer Punkt der Kettenlinie, dessen Abszisse dasselbe Vorzeichen haben möge wie die Abszisse von P_1 und ist $s_2 > s_1$ die Länge des Bogens SP_2, dessen Schwerpunkt die Koordinaten ξ_2, η_2 hat, so findet man leicht für die Koordinaten ξ, η des Schwerpunktes des Bogens $P_1P_2 = s = s_2 - s_1$ die Werte

$$\xi = \frac{s_2\xi_2 - s_1\xi_1}{s}, \quad \eta = \frac{s_2\eta_2 - s_1\eta_1}{s}.$$

Haben die Abszissen von P_1 und P_2 entgegengesetzte Vorzeichen, liegen also P_1 und P_2 mit bezug auf die y-Achse auf verschiedenen Seiten, so ist $s = s_1 + s_2$ und man findet für die Koordinaten des Schwerpunktes des Bogens P_1P_2:

$$\xi = \frac{s_2\xi_2 + s_1\xi_1}{s}, \quad \eta = \frac{s_2\eta_2 + s_1\eta_1}{s}.$$

6. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Bogens P_1P_2 der *Parabel* $y^2 = px$ zu berechnen.

Ist s die Länge des Bogens $P_1 P_2$, so wird

$$s\xi = \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2}{p} \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{p}\right)^2}\, dy,$$

und wenn man wie in Aufg. 8, S. 275 durch die Substitution $2y : p = \mathfrak{Sin}\, u$ hyperbolische Funktionen einführt, folgt

$$s\xi = \tfrac{1}{8} p^2 \int_{u_1}^{u_2} \mathfrak{Sin}^2 u\, \mathfrak{Cos}^2 u\, du = \tfrac{1}{32} p^2 \int_{u_1}^{u_2} \mathfrak{Sin}^2 2u\, du,$$

oder mit Benutzung von Aufg. 16, S. 68:

$$s\xi = \tfrac{1}{256} p^2 \left[\mathfrak{Sin}\, 4u - 4u\right]_{u = u_1}^{u = u_2}.$$

Ferner findet man

$$s\eta = \tfrac{1}{4} p^2 \int_{u_1}^{u_2} \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cos}^2 u\, du = \tfrac{1}{12} p^2 (\mathfrak{Cos}^3 u_2 - \mathfrak{Cos}^3 u_1).$$

Hierbei ist nach Aufg. 8, S. 275:

$$s = \tfrac{1}{8} p \left[\mathfrak{Sin}\, 2u + 2u\right]_{u = u_1}^{u = u_2}.$$

Der Ausdruck für $s\eta$ kann in eine einfache Gestalt gebracht werden, wenn man sich daran erinnert, daß der Ausdruck $\frac{1}{2} p\, \mathfrak{Cos}^3 u$ gleich der Länge ϱ des dem Punkt mit dem Parameter u zugehörigen Krümmungsradius ist (vgl. Aufg. 1, S. 296). Offenbar wird alsdann

$$s\eta = \tfrac{1}{6} p (\varrho_2 - \varrho_1),$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Längen der zu den Endpunkten P_1, P_2 des Parabelbogens gehörigen Krümmungsradien bedeuten.

7. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Bogens der *logarithmischen Spirale* $r = ae^{\vartheta}$ zu berechnen; ϑ_1 und ϑ_2 seien die zu den Endpunkten P_1, P_2 des Bogens gehörigen Polarwinkel.

Die Bogenlänge wird nach Regel **3**, S. 268 f.

$$s = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = a\sqrt{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{\vartheta}\, d\vartheta = a\sqrt{2}\,(e^{\vartheta_2} - e^{\vartheta_1});$$

ferner wird

$$s\xi = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r \cos\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = a^2\sqrt{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{2\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{5} a^2 \sqrt{2} \left[e^{2\vartheta} (2\cos\vartheta + \sin\vartheta)\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2},$$

(vgl. Aufg. 1, S. 105), analog

$$s\eta = a^2\sqrt{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{2\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{5}a^2\sqrt{2}\left[e^{2\vartheta}(2\sin\vartheta - \cos\vartheta)\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

8. Man bestimme die Koordinaten des Schwerpunktes eines Bogens der *Schraubenlinie,* die durch die Parameterdarstellung

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = \frac{ht}{2\pi} = kt$$

gegeben ist. Die Endpunkte des Bogens seien durch die Parameter $t = 0$ und $t = t_1$ bestimmt; $kt_1 = c_1$ sei die zum Punkt mit dem Parameter t_1 gehörige z-Koordinate.

Offenbar liegt die Schraubenlinie auf dem geraden Kreiszylinder, dessen Achse mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammenfällt; die zur Achse rechtwinkligen ebenen Schnitte des Zylinders sind Kreise vom Radius a. Man kann die Schraubenlinie als Bahn eines Punktes P betrachten, der sich auf dem vertikal stehend gedachten Zylinder so bewegt, daß der Abstand des Punktes P von einer wagrechten Ebene (der xy-Ebene) dem Winkel proportional ist, den die senkrechte Projektion des Punktes auf diese Ebene beschreibt. Während diese Projektion einmal einen Kreis vom Radius a durchläuft, ändert sich die z-Koordinate des Punktes P um den Betrag h, die sogenannte *Ganghöhe* der Schraubenlinie.

Die Bogenlänge wird (vgl. Regel **4**, S. 269)

$$s = \int_0^{t_1}\sqrt{a^2+k^2}\,dt = \sqrt{a^2+k^2}\,t_1;$$

ferner wird

$$s\xi = \int_0^{t_1}\sqrt{a^2+k^2}\,a\cos t\,dt = a\sqrt{a^2+k^2}\sin t_1,\qquad \xi = \frac{ak}{c_1}\sin t_1,$$

$$s\eta = \int_0^{t_1}\sqrt{a^2+k^2}\,a\sin t\,dt = a\sqrt{a^2+k^2}(1-\cos t_1),\quad \eta = \frac{ak}{c_1}(1-\cos t_1),$$

$$s\zeta = \int_0^{t_1}\sqrt{a^2+k^2}\,kt\,dt = \frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{2}t_1^2,\qquad \zeta = \frac{1}{2}c_1.$$

9. Den Schwerpunkt des Segments zu bestimmen, das von der *Parabel* $y^2 = px$ durch die Gerade $x = x_1$ abgeschnitten wird.

Der Flächeninhalt F dieses Segments ist nach Aufg. 24, S. 7 gleich $\frac{4}{3}x_1\sqrt{px_1}$; ferner wird

$$F\xi = \int_{x=0}^{x=x_1}\int_{y=-\sqrt{px}}^{y=+\sqrt{px}} x\,dx\,dy = 2\sqrt{p}\int_0^{x_1} x\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{5}\sqrt{p}\,x_1^{\frac{5}{2}},\quad \text{also } \xi = \frac{3}{5}x_1.$$

Der Schwerpunkt liegt natürlich auf der Achse der Parabel, seine Ordinate ist daher $\eta = 0$; wie man sieht, ist ξ unabhängig von dem Parameter p der Parabel.

10. Den Schwerpunkt der Fläche zu bestimmen, die durch den Bogen OP_1 der Kurve $y = cx^n$, $(n > 0)$, die Ordinate M_1P_1 von P_1 und das Stück OM_1 der x-Achse begrenzt ist (Fig. 8, S. 8). Ferner bestimme man die Kurve, die der Schwerpunkt S der jeweiligen Fläche $P_1OM_1P_1$ beschreibt, wenn der Punkt P_1 auf der Kurve fortrückt.

Die Fläche $P_1OM_1P_1$ hat den Inhalt $F = \frac{1}{n+1} c x_1^{n+1} = \frac{1}{n+1} x_1 y_1$. Ferner ist

$$F\xi = \int\limits_{x=0}^{x=x_1} \int\limits_{y=0}^{y=cx^n} x\,dx\,dy = c\int\limits_0^{x_1} x^{n+1}\,dx = \frac{c x_1^{n+2}}{n+2}, \quad \xi = \frac{n+1}{n+2} x_1,$$

$$F\eta = \int\limits_{x=0}^{x=x_1} \int\limits_{y=0}^{y=cx^n} y\,dx\,dy = \frac{1}{2} c^2 \int\limits_0^{x_1} x^{2n}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{c^2 x^{2n+1}}{(2n+1)} = \frac{x_1 y_1^2}{2(2n+1)},$$

$$\eta = \frac{n+1}{2(2n+1)} y_1.$$

Die Bahnkurve des Punktes S ergibt sich durch Elimination von x_1, y_1 aus den Gleichungen für ξ, η und aus $y_1 = c x_1^n$. Man erhält die Parabel n^{ter} Ordnung

$$\frac{2(2n+1)}{n+1}\eta = c\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \xi^n.$$

11. Die Fläche des ersten Quadranten der *Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sei mit Masse belegt, deren Dichte an der Stelle x, y durch $\gamma = \varkappa xy$ gegeben ist, wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche zu berechnen.

Für die Masse des Quadranten findet man

$$M = \varkappa \int\limits_{x=0}^{x=a} \int\limits_{y=0}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx\,dy = \frac{\varkappa b^2}{2a^2}\int\limits_0^a x(a^2-x^2)\,dx = \frac{1}{8}\varkappa a^2 b^2;$$

ferner wird

$$M\xi = \varkappa \int\limits_{x=0}^{x=a} \int\limits_{y=0}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x^2 y\,dx\,dy = \frac{1}{15}\varkappa a^3 b^2,$$

$$M\eta = \varkappa \int\limits_{y=0}^{y=b} \int\limits_{x=0}^{x=+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} x y^2\,dx\,dy = \frac{1}{15}\varkappa a^2 b^3,$$

daher

$$\xi = \frac{8}{15} a, \quad \eta = \frac{8}{15} b.$$

12. Die Gleichung einer ebenen Kurve ist in Polarkoordinaten durch $r = f(\vartheta)$ gegeben; man bestimme den *Schwerpunkt des Sektors,* der durch einen Bogen der Kurve und die Radienvektoren seiner Endpunkte $P_1(r_1, \vartheta_1)$ und $P_2(r_2, \vartheta_2)$ bestimmt ist.

Der Flächeninhalt des Sektors ist nach Regel **4**, S. 246f.:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2\, d\vartheta, \quad \text{wobei} \quad r = f(\vartheta).$$

Für die *rechtwinkligen* Koordinaten ξ, η des Schwerpunktes in einem Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt und x-Achse mit Pol und Polarachse des Systems von Polarkoordinaten zusammenfallen, findet man

$$S\xi = \frac{1}{3}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^3 \cos\vartheta\, d\vartheta, \quad S\eta = \frac{1}{3}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^3 \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

wobei wieder $r = f(\vartheta)$ ist.

13. Man bestimme hiernach den Schwerpunkt des *Kreissektors* $AOBA$ in Aufg. 4, S. 328.

Aus Gründen der Symmetrie wird $\eta = 0$; ferner findet man

$$S\xi = \frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{+\frac{1}{2}\alpha} a^3 \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3} a^3 \sin\frac{\alpha}{2},$$

und mit Rücksicht auf $S = \frac{1}{2} a^2 \alpha$ folgt

$$\xi = \frac{4}{3} a \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha},$$

wobei der Nenner α das zum Zentriwinkel α gehörige Bogenmaß (vgl. Teil I, S. 30) bedeutet.

Insbesondere für den Halbkreis ($\sphericalangle\, \alpha = 180^0$) wird $\xi = \frac{4a}{3\pi}$, für den Quadranten ($\sphericalangle\, \alpha = 90^0$) wird $\xi = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$.

14. Den Schwerpunkt der von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ gerechneten Fläche der *Archimedischen Spirale* $r = a\vartheta$ (vgl. Teil I, S. 38) zu bestimmen.

Der Inhalt dieser Fläche wird

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 \vartheta^2\, d\vartheta = \frac{1}{6} a^2 \pi^3.$$

Ferner findet man

$$S\xi = \tfrac{1}{3}a^3\int_0^\pi \vartheta^3 \cos\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{3}a^3\left[\vartheta^3\sin\vartheta + 3\vartheta^2\cos\vartheta - 6\vartheta\sin\vartheta - 6\cos\vartheta\right]_0^\pi,$$

(vgl. Aufg. 5, S. 106), oder

$$S\xi = \frac{1}{3}a^3(-3\pi^2 + 12), \quad \text{daher} \quad \xi = \frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3};$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3}a^3\int_0^\pi \vartheta^3\sin\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{3}a^3\left[-\vartheta^3\cos\vartheta + 3\vartheta^2\sin\vartheta + 6\vartheta\cos\vartheta - 6\sin\vartheta\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{3}a^3(\pi^3 - 6\pi), \quad \text{daher} \quad \eta = \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}.$$

15. Der zu dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ gehörige Bogen der Kurve $y = f(x)$ rotiert um die x-Achse; man soll den Schwerpunkt des *Mantels* des so entstehenden *Rotationskörpers* bestimmen.

Der Flächeninhalt des Mantels ist bekanntlich (vgl. Regel **2**, S. 295)

$$O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$$

der Schwerpunkt liegt aus Gründen der Symmetrie auf der x-Achse, und zwar findet man seine Abszisse durch

$$O\xi = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} xy\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

16. Die vorstehende Formel auf die Oberfläche der *Zone* anzuwenden, die aus einer *Kugel* durch zwei parallele Ebenen herausgeschnitten wird.

Die Kugel entstehe durch Rotation des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ um die x-Achse; $x = x_1$ und $x = x_2$ seien die Gleichungen der Ebenen, die die Kugelzone herausschneiden.

Aus $x^2 + y^2 = a^2$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

daher

$$O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} a\,dx = 2a\pi(x_2 - x_1).$$

Ferner wird

$$O\xi = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} ax\,dx = a\pi(x_2^2 - x_1^2), \quad \xi = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

der Schwerpunkt ist daher der Mittelpunkt der durch die Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ auf der Rotationsachse begrenzten Strecke.

17. Den Schwerpunkt des Körpers zu bestimmen, der aus dem *Ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch die zwei zur x-Achse rechtwinkligen Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ herausgeschnitten wird.

Für das Volumen dieses Körpers findet man (vgl. Aufg. 4, S. 307 f.):

$$V = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{x_1}^{x_2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{bc\pi}{3a^2}\{3a^2(x_2 - x_1) - (x_2^3 - x_1^3)\}.$$

Ferner wird

$$V\xi = \iiint x\,dx\,dy\,dz = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{x_1}^{x_2}(a^2x - x^3)\,dx$$

$$= \frac{bc\pi}{4a^2}\{2a^2(x_2^2 - x_1^2) - (x_2^4 - x_1^4)\},$$

daher

$$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{2a^2(x_2^2 - x_1^2) + x_1^4 - x_2^4}{3a^2(x_2 - x_1) + x_1^3 - x_2^3} = \frac{3}{4}\,\frac{(x_1 + x_2)(2a^2 - x_1^2 - x_2^2)}{3a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2}.$$

Die Koordinaten η, ζ des Schwerpunktes sind natürlich Null, da der Körper symmetrisch um die x-Achse angeordnet ist.

18. Ein gerader *Kreiskegel* von der Höhe h und mit einer Basis vom Radius a ist gegeben; man bestimme den Schwerpunkt des Kegelmantels und des körperlichen Kegels.

Wir können den Kegel dadurch entstanden denken, daß eine durch den Koordinatenanfang gehende, unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigte Gerade um diese Achse rotiert; dabei muß $\operatorname{tg}\alpha = a : h$ sein.

Für die Abszissen ξ_O und ξ_V der Schwerpunkte von Mantel und Volumen des durch Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers gelten alsdann die Formeln

$$O\xi_O = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} xy\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad V\xi_V = \pi\int_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx.$$

Im vorliegenden Falle ist bekanntlich

$$O = a\pi\sqrt{a^2 + h^2}, \quad V = \tfrac{1}{3}a^2\pi h, \quad y = x\operatorname{tg}\alpha,$$

daher wird

$$O\xi_O = \frac{2\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}\int_0^h x^2\,dx = \frac{2\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{h^3}{3} = \frac{2\pi}{3}\,ah\sqrt{a^2+h^2}, \quad \xi_O = \frac{2}{3}\,h.$$

$$V\xi_V = \pi\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\int_0^h x^3\,dx = \pi\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\cdot\frac{h^4}{4} = \frac{a^2\pi h^2}{4}, \quad \xi_V = \frac{3}{4}\,h.$$

Die Koordinaten η und ζ sind infolge der Symmetrie des Kegels gleich Null, sowohl für den Schwerpunkt des Mantels als für den des Körpers. Beide Schwerpunkte liegen im Innern des Kegels auf dessen Achse, der erste im Abstand $\frac{1}{3}h$, der zweite im Abstand $\frac{1}{4}h$ von der Basis.

19. Bei einer *Kugel* vom Radius a bestimme man den Schwerpunkt des zu einem Zentriwinkel von der Größe 2α gehörigen *Sektors.*

Wählt man die Symmetrielinie des Sektors als z-Achse und im übrigen das Koordinatensystem so wie in Aufg. 20, S. 317, so erhält man für das Volumen V des Sektors nach Aufg. 21, S. 317

$$V = \tfrac{4}{3}a^3\pi\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha;$$

ferner wird

$$V\zeta = \int_{r=0}^{r=a}\int_{\psi=0}^{\psi=\alpha}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} r^3\sin\psi\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\vartheta = \tfrac{1}{4}\,a^4\pi\int_0^\alpha \sin 2\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{8}a^4\pi(1-\cos 2\alpha) = \tfrac{1}{4}a^4\pi\sin^2\alpha = a^4\pi\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

daher

$$\zeta = \tfrac{3}{4}a\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die Koordinaten ξ und η sind natürlich Null. Insbesondere für eine Halbkugel wird $\alpha = 90^0$ und $\zeta = \frac{3}{8}a$.

20. Aus einer durch die Ebene $z = 0$ (oder $\psi = \frac{1}{2}\pi$, vgl. Aufg. 23, S. 290) begrenzten *Halbkugel* (Mittelpunkt O) vom Radius a wird durch zwei Meridianebenen, die miteinander den Winkel α bilden, ein keilförmiger Körper herausgeschnitten; man soll dessen Schwerpunkt bestimmen.

Für das Volumen V des Körpers besteht offenbar die Proportion $V : \frac{2}{3}a^3\pi = \alpha^0 : 360^0$, daher ist $V = \frac{1}{3}a^3\alpha$, wo nun α das zum Winkel α gehörige Bogenmaß beim Kreis vom Radius Eins bedeutet.

Fällt die eine der beiden Meridianebenen mit der xz-Ebene zusammen, so folgt (vgl. Aufg. 20, S. 317):

$$V\xi = \int_{r=0}^{r=a}\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{1}{2}\pi}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha} r^3\sin^2\psi\cos\vartheta\,dr\,d\psi\,d\vartheta = \frac{1}{4}\,a^4\sin\alpha\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\psi\,d\psi = \frac{a^4\pi\sin\alpha}{16},$$

$$V\eta = \int\limits_{r=0}^{r=a}\int\limits_{\psi=0}^{\psi=\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha} r^3 \sin^2\psi \sin\vartheta \, dr\, d\psi\, d\vartheta = \frac{a^4\pi}{16}(1-\cos\alpha),$$

$$V\zeta = \int\limits_{r=0}^{r=a}\int\limits_{\psi=0}^{\psi=\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha} r^3 \sin\psi\cos\psi \, dr\, d\psi\, d\vartheta = \frac{1}{4}a^4\alpha\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\psi\cos\psi\, d\psi = \frac{1}{8}a^4\alpha.$$

Man erhält somit

$$\xi = \frac{3}{16}a\pi\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \eta = \frac{3}{16}a\pi\frac{(1-\cos\alpha)}{\alpha}, \quad \zeta = \frac{3}{8}a.$$

Insbesondere für den Kugeloktanten ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) wird $\xi = \eta = \zeta = \frac{3}{8}a$.

21. Besteht ein Körper von der Gesamtmasse M aus einzelnen Teilen von den Massen $M_1, M_2, \ldots$, deren Schwerpunkte die Koordinaten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \ldots$ haben, während die Dichte an irgend einer Stelle P dieser Teile durch $\gamma_1(x, y, z)$, bzw. $\gamma_2(x, y, z), \ldots$ gegeben ist, so folgt aus der Definition des Schwerpunktes, daß die Gleichung

$$(1) \quad M\xi = \iiint \gamma_1(x,y,z)x\,dx\,dy\,dz + \iiint \gamma_2(x,y,z)x\,dx\,dy\,dz + \cdots$$

oder

$$(2) \qquad M\xi = M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + \cdots$$

besteht, wobei ξ die x-Koordinate des Schwerpunktes S des ganzen Körpers bedeutet; und entsprechende Gleichungen gelten für die y- und z-Koordinate. Den Integralen sind natürlich noch die Grenzen beizufügen.

Ist die Dichte des Körpers homogen, V sein Volumen und sind $V_1, V_2, \ldots$ die Volumina der einzelnen Teile, so tritt

$$(3) \qquad V\xi = V_1\xi_1 + V_2\xi_2 + \cdots$$

an Stelle der Formel (2).

Man soll nun die Gleichung (3) bei Bestimmung des Schwerpunktes S eines Körpers anwenden, der aus einer *Halbkugel* vom Radius a und einem geraden *Kreiskegel* so zusammengesetzt ist, daß die Basis der Halbkugel mit der Basis des Kegels zusammenfällt; die Höhe des Kegels sei h. Man benutze hierbei die Ergebnisse von Aufg. 19, S. 336 und Aufg. 18, S. 335 f.

Die Kegelachse liege in der x-Achse, rechts von der yz-Ebene, der Mittelpunkt der Kegelbasis im Koordinatenanfang. Die Koordinaten η und ζ des Schwerpunktes S sind infolge der Symmetrie des Körpers zur x-Achse gleich Null. Da ferner die Koordinate ξ_1 des Schwer-

punktes der Halbkugel gleich $-\frac{3}{8}a$, die des Schwerpunktes des Kegels $\xi_2 = \frac{1}{4}h$ ist, folgt mit Rücksicht auf (3):

$$\left(\tfrac{2}{3}a^3\pi + \tfrac{1}{3}a^2\pi h\right)\xi = -\tfrac{2}{3}a^3\pi \cdot \tfrac{3}{8}a + \tfrac{1}{3}a^2\pi h \cdot \tfrac{1}{4}h,$$

daher

$$\xi = \frac{1}{4}\,\frac{h^2 - 3a^2}{h + 2a}.$$

Im Falle $h = a\sqrt{3}$ wird $\xi = 0$, der Schwerpunkt des Körpers liegt im Mittelpunkt der Halbkugel. Da sich nun ein in einem Punkt unterstützter Körper im Gleichgewicht befindet, wenn dieser Punkt senkrecht unter dem Schwerpunkt des Körpers liegt, so ist im Falle $h = a\sqrt{3}$ Gleichgewicht vorhanden, gleichgültig mit welcher Stelle der Halbkugel man den Körper auf eine wagrechte Ebene aufsetzt.[1])

22. Man soll die folgenden beiden Sätze beweisen:

a) Das *Volumen des Rotationskörpers,* der entsteht, wenn der Bogen P_1P_2 einer ebenen Kurve oder, was den gleichen Erfolg haben würde, die Fläche $P_1M_1M_2P_2$ um die in der Ebene der Kurve liegende Achse M_1M_2 rotiert, wird erhalten, indem man den Inhalt der rotierenden Fläche mit der Länge des Weges multipliziert, den der Schwerpunkt der *Fläche* bei der Rotation beschreibt.

b) Der *Flächeninhalt des Mantels* desselben Rotationskörpers wird erhalten, indem man die Länge des rotierenden Bogens mit der Länge des Weges multipliziert, den der Schwerpunkt des *Bogens* bei der Rotation beschreibt.[2])

Wählt man nämlich die Rotationsachse als x-Achse und ist $y = f(x)$ die Gleichung der rotierenden Kurve, so ist die Ordinate η_1 des Schwerpunktes der rotierenden Fläche vom Inhalt F nach Regel **4** und **6**, S. 326 f. gegeben durch

$$F\eta_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2}{2}\,dx, \quad \text{daher wird} \quad F \cdot 2\pi\eta_1 = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx,$$

wobei y durch $f(x)$ zu ersetzen ist. Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt aber nach Regel **1**, S. 295 das Volumen des Rotationskörpers dar.

1) Vgl. A. Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, 1. Teil, 2. Aufl., Leipzig 1879, S. 78.

2) Die beiden Sätze waren schon dem Mathematiker Pappus bekannt, der um das Jahr 300 n. Chr. in Alexandrien lebte; vgl. Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, hrsgg. von F. Hultsch, Bd. 2, Berlin 1877, S. 682. Der auf das Volumen des Rotationskörpers bezügliche Satz wurde von P. Guldin wieder gefunden und im 2. Buche seines Werkes Centrobaryca, Wien 1640 veröffentlicht; der Satz ist unter dem Namen der Guldinschen Regel bekannt, würde jedoch richtiger nach Pappus genannt werden.

Zum Beweis des Satzes b) beachte man, daß die Ordinate η_2 des Schwerpunktes des rotierenden Bogens s nach Regel **5** und **6**, S. 326f. gegeben ist durch

$$s\eta_2 = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \text{ daher wird } s\cdot 2\pi\eta_2 = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt aber nach Regel **2**, S. 295 den Flächeninhalt des Mantels des Rotationskörpers dar.

§ 22.

Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Schon auf S. 325 und 326 wurde das statische oder lineare Moment eines Massenelements oder eines Systems solcher Elemente in bezug auf eine Gerade oder eine Ebene behandelt. Dort war die Masse m eines jeden Elements mit der ersten Potenz seines Abstandes von der Geraden oder von der Ebene zu multiplizieren. Tritt an die Stelle der ersten Potenz das *Quadrat* des Abstandes r, so erhält man das *Trägheitsmoment*

$$J = \sum m_i r_i^2$$

des Massensystems, und zwar das *achsiale* oder das *planare Trägheitsmoment,* je nachdem die Größen r_i Abstände von einer Geraden oder von einer Ebene bedeuten sollen. Ganz entsprechend werden die Trägheitsmomente von rein geometrischen Gebilden, also von Kurvenbogen, Flächen und Körpern definiert; die zugehörigen Elemente sind bei rechtwinkligen Koordinaten: $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,\ dx\,dy,\ dx\,dy\,dz.$

Das Trägheitsmoment eines Körpers ist wichtig für die *Mechanik,* so z. B. bei der Bestimmung der *Schwingungsdauer des physischen Pendels,* d. h. eines Körpers, der um eine wagrechte nicht durch seinen Schwerpunkt gehende feste Achse drehbar ist. In der Mechanik wird gezeigt, daß die Schwingungsdauer eines beliebigen physischen und eines mathematischen Pendels von der Länge l übereinstimmen, falls

$$l = \frac{J}{\lambda M}$$

ist. Hierbei bedeutet J das Trägheitsmoment des physischen Pendels in bezug auf die Drehachse, M dessen Masse und λ den Abstand seines Schwerpunktes von der Drehachse; die Größe l bezeichnet man als reduzierte Pendellänge.

Ferner ist z. B. die *lebendige Kraft* einer um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Masse gleich dem Produkt aus $\frac{1}{2}\omega^2$ und dem Trägheitsmoment J der Masse in bezug auf die Achse; der Ausdruck $\frac{1}{2}J\omega^2$ stellt die in dem rotierenden Körper aufgespeicherte *Energie* dar.

Das Trägheitsmoment ebener Flächen wird als *achsial*, auch als *äquatorial* bezeichnet, wenn es auf eine in der Ebene der betreffenden Fläche liegende Achse bezogen wird, als *polar*, wenn es auf einen Punkt P dieser Ebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf eine durch P rechtwinklig zu der Ebene gelegte Achse bezogen wird.

Das achsiale Trägheitsmoment ebener Flächen wird in der *Festigkeitslehre* bei Bestimmung der elastischen *Durchbiegung* eines belasteten eingespannten oder auf Lagern ruhenden Balkens benutzt, sowie bei Bestimmung der *Spannung*, die die einzelnen Teile eines Balkenquerschnitts erleiden.

Für die Trägheitsmomente von Bogen, ebenen Flächen und Körpern gelten folgende Regeln:

1. Die Trägheitsmomente J_x bzw. J_y des sich vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_2 erstreckenden Bogens der ebenen Kurve $y = f(x)$ in bezug auf die x-Achse bzw. y-Achse sind durch die Formeln gegeben:

$$J_x = \int_{x_1}^{x_2} y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad J_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

2. Für die Trägheitsmomente einer in der xy-Ebene liegenden Fläche mit Bezug auf die x-Achse bzw. y-Achse gelten die Formeln:

$$J_x = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} y^2\, dx\, dy, \quad J_y = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} x^2\, dx\, dy.$$

Wird hier erst nach y dann nach x integriert, so sind für y_1 und y_2 die entsprechenden Funktionen von x einzutragen, x_1 und x_2 sind dann reine Zahlen; wird umgekehrt erst nach x, dann nach y integriert, so sind im allgemeinen x_1 und x_2 Funktionen von y, hingegen y_1 und y_2 reine Zahlen (vgl. Regel **6**, S. 305).

3. Für das Trägheitsmoment J_z einer in der xy-Ebene liegenden Fläche mit Bezug auf eine durch den Koordinatenanfang gehende zu dieser Ebene rechtwinklige Achse (z-Achse) gilt die Formel

$$J_z = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Wie man sofort bemerkt, ist $J_z = J_x + J_y$.

4. Die Trägheitsmomente eines Körpers in bezug auf die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind:

$$J_x = \iiint (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad J_y = \iiint (z^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz,$$
$$J_z = \iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz;$$

die noch beizufügenden Integrationsgrenzen hängen natürlich von der Begrenzung des Körpers ab.

5. Da der Ausdruck $\sum m_i r_i^2$ für das Trägheitsmoment die *Quadrate* der Abstände der einzelnen Massenelemente von der betreffenden Achse oder Ebene enthält, sind die Trägheitsmomente *quadratische* Momente oder solche zweiter Ordnung. Zu diesen gehören auch die sogenannten *Zentrifugalmomente* oder *Deviationsmomente*; sie beziehen sich auf ein *Paar* von (meist zueinander rechtwinkligen) Achsen oder Ebenen und sind Ausdrücke von der Form $\sum m_i r_i s_i$, wo r_i und s_i die Abstände des Massenelementes m_i von den beiden Achsen oder den beiden Ebenen bedeuten, je nachdem es sich um ein *achsiales* oder *planares* Zentrifugalmoment handelt. Entsprechendes gilt für rein geometrische Gebilde.

Wir geben hier nur die Formel für das Zentrifugalmoment $Z_{x,y}$ eines in der xy-Ebene liegenden Flächenstücks in bezug auf das Paar der Koordinatenachsen. Man erhält

$$Z_{x,y} = \iint xy\,dx\,dy,$$

und hier ist bezüglich der Integrationsgrenzen dasselbe zu bemerken wie zuvor in Regel **2**.

6. Als *Trägheitsradius* eines Massensystems bezeichnet man eine Strecke von solcher Beschaffenheit, daß das Produkt aus dem Quadrat der Länge dieser Strecke und der Gesamtmasse des Systems gleich dem Trägheitsmoment J dieses Systems ist. Je nachdem J achsial oder planar ist (vgl. S. 339), unterscheidet man axiale und planare Trägheitsradien. Entsprechend ist der Trägheitsradius bei rein geometrischen Gebilden zu definieren, und es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem dieses Gebilde eine Kurve, eine Fläche oder ein Körper ist.

Beispiele.

1. Zunächst soll ein Satz bewiesen werden, mit Hilfe dessen sich die Bestimmung von Trägheitsmomenten häufig sehr vereinfacht. Er lautet:

Das Trägheitsmoment J_g eines Körpers von der Masse M in bezug auf eine beliebige Achse g erhält man, wenn man das Trägheitsmoment J_x des Körpers in bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt S parallel zur Achse g gezogene Gerade (x-Achse) um das Produkt aus M und

dem Quadrat c^2 des Abstandes c der beiden Achsen vermehrt. Hiernach ist

$$J_g = J_x + c^2 M.$$

Der entsprechende Satz gilt auch für einen rein geometrischen Körper, ferner für Flächen und Kurvenbogen, und zwar können diese mit Masse belegt sein (vgl. S. 324 f.) oder rein geometrische Gebilde sein.

Wir beschränken uns beim Beweis des Satzes auf den Fall eines *Körpers* von der Masse M; in den anderen Fällen ist das Beweisverfahren ähnlich. Der Anfangspunkt eines Systems rechtwinkliger Koordinaten x, y, z liege im Schwerpunkt S, die x-Achse sei, wie schon angedeutet, zur Achse g parallel und außerdem möge diese Gerade g in der xy-Ebene liegen, was jederzeit angenommen werden kann, denn sollte diese Voraussetzung einmal nicht erfüllt sein, so kann man das Koordinatensystem um die x-Achse drehen, bis sie erfüllt ist.

Bezeichnet dm ein Massenelement des Körpers, so ist alsdann

$$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad J_g = \int \{(y \pm c)^2 + z^2\}\, dm,$$

wo das Integralzeichen im allgemeinen eine dreifache Integration andeutet (vgl. Regel **2**, S. 325). Bei $y \pm c$ ist das obere oder untere Vorzeichen zu setzen, je nachdem der Schnittpunkt der Achse g und der y-Ache eine negative oder positive y-Koordinate hat. Man erhält

$$J_g = \int (y^2 + z^2)\, dm + c^2 \int dm \pm 2c \int y\, dm$$

und hier verschwindet das letzte Integral, denn sein Wert ist nach Regel **3**, S. 325 f. der y-Koordinate des Schwerpunktes S proportional, die jetzt Null ist, da S im Koordinatenanfang liegt. So ergibt sich in der Tat

$$J_g = J_x + c^2 M.$$

2. Der eine Endpunkt A einer *Strecke* von der Länge l hat von einer mit dieser Strecke in derselben Ebene liegenden Achse (x-Achse) den Abstand a, der andere Endpunkt B den Abstand $b \geqq a$. Man soll das Trägheitsmoment der Strecke AB in bezug auf die Achse bestimmen.

Fig. 78.

Legt man die y-Achse durch den Punkt A rechtwinklig zur x-Achse und bedeutet α den Neigungswinkel der Geraden AB (Fig. 78), so ist $y = a + x \operatorname{tg} \alpha$ deren Gleichung. Nach Regel **1**, S. 340 wird also

$$J_x = \int_0^{l \cos \alpha} \frac{(a + x \operatorname{tg} \alpha)^2}{\cos \alpha}\, dx = \frac{1}{3}\, l\, (3a^2 + 3al \sin \alpha + l^2 \sin^2 \alpha),$$

und wenn man $\sin\alpha$ vermöge $l\sin\alpha = b - a$ eliminiert, folgt

$$J_x = \tfrac{1}{3} l (a^2 + b^2 + ab).$$

3. Die Trägheitsmomente eines zum Zentriwinkel α gehörigen *Kreisbogens* sollen in bezug auf zwei zueinander rechtwinklige Kreisdurchmesser bestimmt werden, deren einer durch den einen Endpunkt des Bogens geht; die Länge des Kreisradius sei a.

Fig. 79.

Bei der aus Fig. 79 ersichtlichen Lage des Koordinatensystems und bei Benutzung von Polarkoordinaten r, ϑ ist allgemein

$$J_x = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta, \qquad J_y = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta.$$

Im vorliegenden Fall, wo $r = a$ die Gleichung des Kreises darstellt, erhält man

$$J_x = \int_0^\alpha a^3 \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2} a^3 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha),$$

$$J_y = \int_0^\alpha a^3 \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2} a^3 (\alpha + \sin\alpha\cos\alpha).$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Kreis*peripherie* in bezug auf irgend einen Durchmesser wird offenbar $J = a^3\pi$.

4. Die Trägheitsmomente einer durch

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t),$$

gegebenen *Raumkurve* in bezug auf die Koordinatenachsen zu bestimmen.

Nach Regel **4**, S. 269 gilt für ein Bogenelement ds der Raumkurve die Formel $ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \chi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$. Da ferner die Ausdrücke $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$, $x^2 + y^2$ die Quadrate der Abstände des Punktes $P(x, y, z)$ von den Koordinatenachsen darstellen, erhält man ähnlich wie in Regel **1**, S. 340 bei einer ebenen Kurve:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} (\chi^2 + \psi^2) \sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2} \, dt,$$

$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} (\psi^2 + \varphi^2) \sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2} \, dt,$$

$$J_z = \int_{t_1}^{t_2} (\varphi^2 + \psi^2) \sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2} \, dt.$$

5. Man wende die vorstehenden Formeln an auf eine Strecke von der Länge l, die der Geraden

$$x = a + t\cos\alpha, \quad y = b + t\cos\beta, \quad z = c + t\cos\gamma$$

angehört. Der eine Endpunkt P_1 der Strecke habe den Parameter $t = 0$, also die Koordinaten a, b, c; $t = l$ ist der Parameter des in der Richtung α, β, γ auf der Geraden gelegenen anderen Endpunktes P_2 der Strecke.

Man erhält

$$J_x = \int_0^l \{(b + t\cos\beta)^2 + (c + t\cos\gamma)^2\}\, dt,$$

denn $+\sqrt{\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2}$ wird hier $+\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$; die Ausrechnung ergibt

$$J_x = l\,\{b^2 + c^2 + l\,(b\cos\beta + c\cos\gamma) \;+ \tfrac{1}{3}\, l^2 \sin^2\alpha\}\cdot$$

Entsprechende Werte haben J_y und J_z.

6. Die Seiten eines Rechtecks haben die Längen b und h; man bestimme das Trägheitsmoment der Fläche des Rechtecks in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt parallel zur Seite b gezogene Gerade (x-Achse).

Man erhält bei Benutzung des aus Fig. 80 ersichtlichen Koordinatensystems

$$J_x = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2\, dy = \tfrac{1}{12}\, b h^3.$$

Das Trägheitsmoment eines Rechtecks ist wichtig zur Bestimmung der Trägheitsmomente anderer Figuren, die aus Rechtecken zusammengesetzt sind. Wird z. B. aus dem Rechteck $ABCD$ in Figur 80 ein Rechteck $EFGH$ herausgeschnitten, dessen zu AB und CD parallele Seiten EF und GH von der x-Achse um die Strecken $\frac{1}{2}h_1$ entfernt sind, so erhält man eine Figur (Fig. 81), deren Trägheitsmoment J_x in bezug auf die x-Achse gleich $\frac{1}{12}\, b\,(h^3 - h_1{}^3)$ ist.

Fig. 80.

Fig. 81.

Werden die beiden Rechtecke $ABEF$ und $GHCD$ oder *Flanschen* durch einen Steg $KLMN$ von der Breite d verbunden, der die y-Achse zur Symmetrielinie hat, so erhält man den Querschnitt der *Doppel*-T-*Eisen* oder I-Eisen, nur mit dem geringfügigen Unterschied, daß bei dem Querschnitt dieser Eisen die Ecken bei E, F,

G, H, K, L, M, N abgerundet sind und die inneren Flanschenflächen nicht genau parallel zu AB und CD verlaufen, sondern gegen AB und CD etwas geneigt sind. Ist $EK = LF = \frac{1}{2} b_1$, somit $d = b - b_1$, so wird

$$J_x = \tfrac{1}{12}(bh^3 - b_1 h_1^3),$$

denn J_x ergibt sich, wenn man von dem Trägheitsmoment des Rechtecks $ABCD$ die Trägheitsmomente $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} b_1 h_1^3$ der Rechtecke $EKGM$ und $LFNH$ abzieht.

Wie aus der Definition der Trägheitsmomente hervorgeht, bleiben diese unverändert, wenn einzelne Flächenteile in einer zur Achse parallelen Richtung verschoben werden. Wird z. B. in Figur 81 der Steg $KLMN$ verschoben, bis KM mit EG zusammenfällt, so erhält man den Querschnitt der ⊏-Eisen (Fig. 82).

Fig. 82.

7. Bei einem belasteten Stab oder Balken, der beispielsweise am einen Ende eingespannt oder an mehreren Stellen aufgelagert ist, spielt die Bestimmung des sogenannten *Widerstandsmoments* eines Querschnitts eine wichtige Rolle. Allgemein versteht man unter dem Widerstandsmoment W einer ebenen Fläche F in bezug auf eine in ihrer Ebene liegende Achse g den Quotienten aus dem Trägheitsmoment von F in bezug auf g und dem absoluten Abstand η der Achse g von derjenigen Stelle der Fläche F, die von g am weitesten entfernt ist.

Es werde nun ein wagrechter prismatischer Balken durch vertikale, zur Längsrichtung des Balkens rechtwinklige Ebenen geschnitten und die in der Praxis wohl stets erfüllte Annahme gemacht, daß jeder dieser Querschnitte eine vertikale Symmetrielinie habe. Alsdann bezeichnet man die Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser Querschnitte q als Achse des Balkens. In der Festigkeitslehre werden die Belastungen und Auflagerdrucke durch Kräfte dargestellt, die in den Punkten dieser Achse angreifen. Eine wagrechte Gerade, die in einem Querschnitt q durch dessen Schwerpunkt gezogen ist, heißt die *Nullinie, Schwerpunktsachse* oder *neutrale Achse* des Querschnitts.

Ist nun ein Stab oder Balken am einen Ende eingespannt und an einer oder mehreren Stellen belastet, oder ist er auf Stützen gelagert und belastet, so wird er infolge dieser Belastung verbogen, es treten Spannungen ein, bei denen ein Teil der Längsfasern des Balkens einen Zug, also Verlängerung, ein anderer Teil einen Druck, also Verkürzung erleidet. Zwischen beiden Teilen liegt eine Schicht von Fasern, deren Länge sich nicht geändert hat, die *neutrale Faserschicht.* Es wird ferner angenommen, daß Flächenelemente, die vor der Verbiegung in einem und demselben Querschnitt lagen, auch nach der Biegung in einer Ebene liegen. Wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, schneidet als-

dann die neutrale Faserschicht den Querschnitt q in dessen neutraler Achse.[1])

Man pflegt anzunehmen, daß die Spannung σ an irgend einer Stelle P des Querschnitts q dem Abstand von der neutralen Faserschicht proportional ist; auf einer Seite derselben bedeutet σ einen *Zug*, auf der anderen Seite einen *Druck*, in beiden Fällen wird gewöhnlich σ in kg/qcm gemessen. Ist M das für den Querschnitt berechnete *Biegungsmoment* (vgl. S. 35), J sein *Trägheitsmoment* in bezug auf seine neutrale Achse, p der Abstand der Stelle P des Querschnitts von dieser Achse, so berechnet man die in P stattfindende Spannung σ, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, nach der Formel

$$\sigma = \frac{Mp}{J},$$

und der größte Wert, den die Spannung in einem Querschnitt erleidet, ist offenbar

$$\sigma_1 = M : W,$$

wo $W = J : \eta$ das Widerstandsmoment des Querschnitts q bedeutet (vgl. S. 345).

Ist die Gestalt des Querschnitts q nicht symmetrisch zur neutralen Achse, so wird er durch diese Achse nicht halbiert, sondern in zwei ungleiche Teile q_1 und q_2 geteilt. Sind dann η_1 und η_2 die absoluten Abstände dieser Achse von der am weitesten entfernten Stelle des Teiles q_1 bzw. q_2, so unterscheidet man bei Bestimmung des Widerstandsmoments die beiden Fälle $W_1 = J : \eta_1$ und $W_2 = J : \eta_2$.

Zur Anwendung der vorstehenden Erläuterungen und des Ergebnisses von Aufg. 6 diene die folgende Aufgabe:

Das eine Ende eines 110 cm langen Balkens aus Eichenholz ist eingespannt, das andere Ende wird durch ein Gewicht von 500 kg auf Biegung beansprucht. Der Balken hat rechteckigen Querschnitt. Wie groß müssen die Breite b und die Höhe h des Querschnitts sein, wenn die Spannung höchstens 80 kg/qcm (vgl. S. 29) betragen und die Tragfähigkeit ein Maximum, d. h. (nach Teil I, S. 126) $b : h = 5 : 7$ sein soll?

Hier ist

$$M = 110.500 \text{ kgcm}, \quad W = \tfrac{1}{12} b h^3 : \tfrac{1}{2} h = \tfrac{1}{6} b h^2,$$

daher folgt

$$80 = \frac{55000 \cdot 6}{b h^2} = \frac{55000 \cdot 6 \cdot 7}{5 h^3},$$

$$h = \sqrt[3]{5775} = 17{,}9 \text{ cm}, \quad b = \tfrac{5}{7} h = 12{,}8 \text{ cm}.$$

---

1) Vgl. z B. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 1, 3. Aufl., Leipzig 1905, S. 305—308; A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, 2. Aufl., Leipzig 1885, S. 7; P. Stephan, Die technische Mechanik, 2. Teil, Leipzig und Berlin 1906, S. 23.

8. Will man bestimmen, welche Dimensionen der Querschnitt eines eisernen Trägers, z. B. eines Doppel-T-Eisens bei einer gewissen Belastung und bei gegebener größter Biegungsspannung σ haben muß, so genügt die Berechnung des Widerstandsmoments W mit Hilfe von $W = M : \sigma$, wobei M das größte bei der gegebenen Belastung auftretende Biegungsmoment bezeichnet. Aus einer Tafel der deutschen Normalprofile für Doppel-T-Eisen[1]) kann man alsdann entnehmen, welches Normalprofil dem gefundenen Widerstandsmoment entspricht. Ein Beispiel hierzu bietet die folgende Aufgabe. Wenngleich zu ihrer Lösung Integralrechnung nicht erforderlich ist, wird sie doch hier gelöst, um zu zeigen, von welcher Wichtigkeit die Bestimmung des Widerstandsmoments für die Festigkeitslehre ist.

200kg 300kg 600kg
150cm 150cm 200cm 100cm
C A D E B

Fig. 83.

Ein Doppel-T-Träger aus Walzeisen ist in A und B unterstützt und in der aus Fig. 83 ersichtlichen Weise an den Stellen C, D, E belastet; die größte zulässige Biegungsspannung σ betrage 1000 kg/qcm. Man soll den Querschnitt bestimmen, dem das größte Biegungsmoment M zugehört und mit Hilfe der Formel $\sigma = M : W$ das Widerstandsmoment W.

A E G F y B H C

Fig. 84.

Die Lagerreaktionen bei A und B findet man (vgl. S. 36) gleich 600 kg bzw. 500 kg; für die Biegungsmomente in A, D und E ergeben sich die Werte

$$M_A = -30000 \text{ kgcm}, \quad M_D = +30000 \text{ kgcm}, \quad M_E = +50000 \text{ kgcm},$$

somit ist $M = 50000$, $W = 50$, man wird das Normalprofil Nr. 12 wählen.

9. Das Trägheitsmoment des *Dreiecks* ABC in bezug auf die Basis BC zu bestimmen.

Ist h die Länge der zur Seite $BC = a$ gehörigen Höhe des Dreiecks, so gilt für eine im Abstand $HG = y$ parallel zur Seite BC gezogene Gerade EF (Fig. 84) die Beziehung

$$EF : BC = AG : AH \quad \text{oder} \quad EF = (h - y)\frac{a}{h}.$$

Für das gesuchte Trägheitsmoment erhält man somit

$$J_x = \int_0^h \frac{(h-y)\,a y^2}{h}\,dy = \frac{1}{12}\,a h^3.$$

1) Vgl. z. B. Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom akademischen Verein Hütte, 21. Aufl., Bd. 1, Berlin 1911, S. 659.

10. Von einer *Parabel* wird durch eine rechtwinklig zur Achse gezogene Gerade $P_1 Q_1$ ein Segment (Fig. 85) abgeschnitten; wie groß ist dessen Trägheitsmoment in bezug auf die Achse der Kurve und wie groß ist es in bezug auf die Scheiteltangente?

Fig. 85.

Man erhält

$$T_x = \int\limits_{x=0}^{x=x_1}\int\limits_{y=-\sqrt{px}}^{y=+\sqrt{px}} y^2\,dx\,dy,$$

wenn $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel ist und der Punkt P_1 die Abszisse x_1 hat; die Integration ergibt

$$J_x = \tfrac{4}{15} x_1 y_1^3.$$

Das Trägheitsmoment J_y in bezug auf die Scheiteltangente wird

$$J_y = \int\limits_{x=0}^{x=x_1}\int\limits_{y=-\sqrt{px}}^{y=+\sqrt{px}} x^2\,dx\,dy = \tfrac{4}{7} x_1^3 y_1.$$

11. Zwei konzentrische Ellipsen, deren Achsen aufeinander fallen, bilden einen *elliptischen Ring*; man bestimme dessen Trägheitsmoment in bezug auf jede Achse der beiden Ellipsen. Für die äußere Kurve seien a_1, b_1 die Längen der Halbachsen, für die innere $a < a_1$, $b < b_1$. Wird das Koordinatensystem in der üblichen Weise angenommen, so erhält man

$$J_x = 4\int\limits_{x=0}^{x=a_1}\int\limits_{y=0}^{y=\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2}} y^2\,dx\,dy - 4\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{4}{3}\frac{b_1^3}{a_1^3}\int\limits_0^{a_1}(a_1^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{4}{3}\frac{b^3}{a^3}\int\limits_0^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx,$$

und hieraus geht durch die Substitution $x = a_1 \cos t$, bzw. $x = a\cos t$ der Ausdruck

$$J_x = -\tfrac{4}{3} a_1 b_1^3 \int\limits_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin^4 t\,dt + \tfrac{4}{3} a b^3 \int\limits_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin^4 t\,dt$$

hervor. Nach Aufg. 76, S. 99 folgt schließlich

$$J_x = \tfrac{1}{4}\pi(a_1 b_1^3 - a b^3), \quad \text{analog} \quad J_y = \tfrac{1}{4}\pi(a_1^3 b_1 - a^3 b).$$

Die Trägheitsmomente J_x und J_y einer vollen Ellipse ergeben sich hieraus durch die Annahme $a = b = 0$.

Für $b = a$ und $b_1 = a_1$ erhält man das Trägheitsmoment

$$J = \tfrac{1}{4}\pi(a_1^4 - a^4)$$

eines Kreisrings in bezug auf irgend einen Durchmesser des Ringes; für eine Kreisfläche vom Radius a_1 wird $J = \frac{1}{4}\pi a_1^4$.

12. Ein eiserner *Träger von kreisförmigem Querschnitt* ist an seinen Enden A, B auf Stützen gelagert, deren gegenseitige Entfernung 1,80 m beträgt. Im Abstand 50 cm von A hängt eine Last von 60 kg, im Abstand 30 cm von B eine solche von 88 kg (Fig. 86). Wie groß muß der Radius des Querschnitts sein, wenn die höchste zulässige Biegungsspannung $\sigma = 900$ kg/qcm betragen, aber das Eigengewicht des Trägers nicht berücksichtigt werden soll?

50cm 100cm 30cm
60kg 88kg

Fig. 86.

Man hat zunächst zu untersuchen, welchem Querschnitt des Trägers das größte Biegungsmoment zugehört, und zwar kann hierbei nur einer der beiden Querschnitte in Betracht kommen, an denen die Lasten angehängt sind. Die ihnen zugehörigen Biegungsmomente seien, in sofort verständlicher Bezeichnungsweise, M_{50} und M_{150}. Für die Lagerreaktionen an den Stützen findet man die Werte $A = 58$ kg, $B = 90$ kg, daher wird $M_{50} = 58.50 = 2900$ kgcm, $M_{150} = 58.150 - 60.100 = 2700$ kgcm, das größte Biegungsmoment beträgt daher 2900 kgcm. Das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf dessen Nullinie ist (nach Aufg. 11): $J = \frac{1}{4}a^4\pi$, wenn a den Radius des Querschnitts bedeutet; das zugehörige Widerstandsmoment ist somit $W = \frac{1}{4}a^3\pi$. Die schon in Aufg. 7 benutzte Gleichung $\sigma = M : W$ wird nunmehr

$$900 = \frac{2900 \cdot 4}{a^3\pi} \quad \text{und ergibt} \quad a = 1{,}6 \text{ cm}.$$

13. Wie gestaltet sich das Ergebnis von Aufg. 12, wenn der Querschnitt des Trägers ein Kreisring sein soll, bei dem der innere Radius a und der äußere a_1 im Verhältnis $a : a_1 = 4 : 5$ stehen sollen?

Nun wird (vgl. Aufg. 11)

$$J = \frac{1}{4}\pi(a_1^4 - a^4) = \frac{1}{4}a_1^4\pi(1 - 0{,}8^4),$$
$$W = \frac{1}{4}a_1^3\pi(1 - 0{,}8^4) = \frac{1}{4}a_1^3\pi \cdot 0{,}5904,$$

also

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{2900 \cdot 4}{900 \cdot \pi \cdot 0{,}5904}} = 1{,}9 \text{ cm} \quad \text{und} \quad a = \frac{4}{5}a_1 = 1{,}5 \text{ cm}.$$

14. Hierher gehört auch die Aufgabe, die Form eines Trägers zu bestimmen, dessen größte Spannung (bei gegebener Belastung) in jedem Querschnitt denselben Betrag σ haben soll (Träger gleicher Biegungsfestigkeit); hier ist alsdann der Quotient $M : W$ gleich dieser konstanten größten Spannung zu setzen. Wenn z. B. die Querschnitte eines Trägers Kreise sein sollen und die in Aufg. 49, S. 37 behandelte *gleichförmige Belastung* eines wagrecht gelagerten Balkens vorliegt, so kann man fragen: in welcher Weise muß sich der Radius z eines solchen

kreisförmigen Querschnitts mit seinem Abstand x vom Endpunkt R des Balkens (Fig. 25) ändern, wenn $M : W$ konstant sein soll? Dabei werde der Einfachheit halber angenommen, daß der Balken an seinen Enden R, S gelagert, also in den Formeln von Aufg. 49, S. 37 die Größe $a = 0$ und $b = l$ sei.

Hier ist M_x nach S. 37 gleich $\frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2$, ferner W nach Aufg. 11 und 7 gleich $\frac{1}{4} \pi z^4 : z$, man erhält daher zwischen x und z die Beziehung

$$\sigma = \{\tfrac{1}{2} q l x - \tfrac{1}{2} q x^2\} : \tfrac{1}{4} \pi z^3$$

oder

$$\pi \sigma z^3 = 2 q x (l - x), \tag{1}$$

also die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung (Fig. 87). Rotiert der Bogen RS dieser Kurve um die x-Achse, so entsteht ein Körper gleicher Biegungsfestigkeit. Es ist selbstverständlich, daß diese Kurve wegen der gleichmäßigen Belastung des Trägers zu dem in der Mitte des Trägers befindlichen Querschnitt ($x = \frac{1}{2} l$) symmetrisch sein muß, und dies kommt in der Gleichung der Kurve zum Ausdruck, wenn man durch die Substitution $x = \frac{1}{2} l + \xi$, $z = \zeta$ den Koordinatenanfang an die Stelle $x = \frac{1}{2} l$ der Achse des Trägers verschiebt, denn die Gleichung (1) der Kurve geht alsdann über in

Fig. 87.

$$2 \pi \sigma \zeta^3 = q (l^2 - 4 \xi^2), \tag{2}$$

und hier ist ξ nur mit einem geradzahligen Exponenten behaftet, die Kurve also tatsächlich zur ζ-Achse symmetrisch.

Ähnlich wäre bei einem Träger zu verfahren, dessen Querschnitte Rechtecke sind, man müßte aber, da die Dimensionen eines Rechtecks durch *zwei* Größen, Breite und Höhe, bestimmt sind, hier noch eine weitere Forderung stellen, z. B. daß alle diese rechteckigen Querschnitte einander ähnlich sein oder gleiche Breite oder gleiche Höhe haben sollen. Es würde zu weit führen auf diese Dinge hier näher einzugehen.

15. Die Summe $J_x + J_y$ der Trägheitsmomente einer ebenen Fläche in bezug auf zwei beliebige zueinander rechtwinklige Achsen (x-Achse, y-Achse), die mit der Fläche in derselben Ebene ε (xy-Ebene) liegen, ist so groß wie das Trägheitsmoment J_z der Fläche in bezug auf eine durch den Schnittpunkt O der beiden Achsen rechtwinklig zu deren Ebene ε gezogene Gerade (z-Achse). Dies ist zu beweisen.

Aus

$$J_z = \iint (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

ergibt sich sofort

$$J_z = \iint y^2 \, dx \, dy + \iint x^2 \, dx \, dy = J_x + J_y \tag{1}$$

Nun muß aber offenbar der Wert des Trägheitsmoments J_z ganz unabhängig sein von der Lage der zwei durch O in der Ebene ε gezogenen zueinander rechtwinkligen Achsen. Würde man also in dieser Ebene durch O zwei andere zueinander rechtwinklige Achsen ξ, η legen, so wäre auch

$$(2) \qquad J_z = J_\xi + J_\eta .$$

Aus (1) und (2) folgt sofort: *Die Summe der Trägheitsmomente einer ebenen Fläche F in bezug auf ein beliebiges Paar zueinander rechtwinkligen, mit F in derselben Ebene liegenden Achsen ist konstant, so lange der Schnittpunkt O der beiden Achsen derselbe bleibt.*

16. Für die Fläche eines Kreises vom Radius a ist nach Aufg. 11 das Trägheitsmoment in bezug auf irgend einen Durchmesser $J = \frac{1}{4} a^4 \pi$; in bezug auf eine durch den Mittelpunkt rechtwinklig zu der Fläche des Kreises gezogene Gerade (z-Achse) wird daher

$$J_z = \tfrac{1}{2} a^4 \pi .$$

Ferner ist für das in Aufg. 6 betrachtete Rechteck:

$$J_x = \tfrac{1}{12} b h^3, \quad J_y = \tfrac{1}{12} b^3 h;$$

daher folgt

$$J_z = \tfrac{1}{12} b h (b^2 + h^2).$$

17. Es seien J_x, J_y, Z_{xy} die Trägheitsmomente und das Zentrifugalmoment (vgl. Regel **5**, S. 341) einer ebenen Fläche F in bezug auf zwei mit F in derselben Ebene liegende zueinander rechtwinklige Achsen. In welcher Beziehung stehen J_x, J_y, und Z_{xy} zu den Trägheitsmomenten J_ξ, J_η und zu dem Zentrifugalmoment $Z_{\xi\eta}$ derselben Fläche in bezug auf zwei andere rechtwinklige Achsen ξ, η, die mit x, y den Schnittpunkt O gemeinsam haben? Dabei mögen die positiven Richtungen der Achsen ξ, η mit der positiven Richtung der x-Achse die Winkel α bzw. $\alpha + 90^0$ bilden.

Zwischen den beiden Achsensystemen bestehen, wie in den Elementen der analytischen Geometrie gezeigt wird, die Beziehungen

$$(1) \qquad \xi = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad \eta = -x \sin\alpha + y \cos\alpha .$$

Vermöge derselben geht

$$J_\xi = \int\int \eta^2 \, d\xi \, d\eta$$

nach Regel **5**, S. 304 f. über in

$$(2) \qquad J_\xi = \int\int (x^2 \sin^2\alpha + y^2 \cos^2\alpha - 2xy \sin\alpha \cos\alpha) dx\, dy,$$

denn die Funktionaldeterminante der Substitutionen (1) ist gleich 1. Aus (2) folgt sofort

$$(3) \qquad J_\xi = J_y \sin^2\alpha + J_x \cos^2\alpha - 2 Z_{xy} \sin\alpha \cos\alpha ,$$

und analog erhält man

$$(4) \qquad J_\eta = J_y \cos^2\alpha + J_x \sin^2\alpha + 2 Z_{xy} \sin\alpha\cos\alpha,$$

$$(5) \qquad Z_{\xi,\eta} = \tfrac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + Z_{xy}\cos 2\alpha.$$

Durch Addition von (3) und (4) ergibt sich übrigens

$$J_\xi + J_\eta = J_x + J_y,$$

also der schon am Schluß von Aufg 15 erwähnte Satz.

Wir erwähnen noch die mit Hilfe der Differentialrechnung leicht zu lösende Aufgabe die *Hauptträgheitsachsen* zu bestimmen, d. h. die beiden durch O gehenden Achsen, in bezug auf die das Trägheitsmoment der Fläche ein Maximum oder ein Minimum ist. Diese Achsen sind zueinander rechtwinklig; die ihnen zugehörigen Trägheitsmomente heißen die *Hauptträgheitsmomente*. Ist insbesondere $Z_{xy} = 0$, so fallen die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammen.

Wird auf allen durch O gehenden Geraden g von O aus nach beiden Seiten hin der *reziproke* Wert der Quadratwurzel aus dem auf diese Geraden bezogenen Trägheitsmoment J_g, also $1 : \sqrt{J_g}$, aufgetragen, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken die Peripherie einer Ellipse, der sogen. *Euler schen Trägheitsellipse.* Mit Hilfe von

$$\cos\alpha = x\sqrt{J_g}, \quad \sin\alpha = y\sqrt{J_g}$$

und (nach (3)):

$$J_g = J_y \sin^2\alpha + J_x \cos^2\alpha - 2 Z_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

ergibt sich

$$(6) \qquad J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 - 2 Z_{xy} \cdot xy = 1$$

als Gleichung der Trägheitsellipse. Fällt ihr Mittelpunkt O in den Schwerpunkt der ebenen Fläche F, so wird die Ellipse als *Zentralellipse* bezeichnet.

Wir können hier nicht näher auf diese Dinge eingehen, verweisen vielmehr auf die ausführlicheren Lehrbücher der Mechanik und der graphischen Statik.[1])

18. Das Trägheitsmoment J_x eines *Rotationskörpers* in bezug auf seine geometrische Achse zu bestimmen; der Körper entstehe durch Drehung eines Bogens $P_1 P_2$ der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse.

---

1) Es seien z. B. genannt: H. Lorenz, Technische Mechanik starrer Systeme, München und Berlin 1902; H. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Stuttgart 1905; O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906; L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme, Leipzig und Berlin 1911; G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig und Berlin 1912.

Sind x_1, x_2 die Abszissen der Endpunkte des rotierenden Bogens, so ist $\frac{1}{2}y^4\pi$ nach Aufg. 16 das Trägheitsmoment eines zur Achse rechtwinkligen Querschnitts; daher folgt

$$J_x = \frac{\pi}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx,$$

wo natürlich vor der Integration y durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

Entsteht der Körper durch Rotation eines Flächenstücks wie $Q_1P_1P_2Q_2$ (Fig. 88) um die x-Achse und sind $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ die Gleichungen der Kurven, denen die Bogen P_1P_2 bzw. Q_1Q_2 angehören, so wird offenbar

$$J_x = \tfrac{1}{2}\pi\int_{x_1}^{x_2}\{\varphi_2{}^4(x) - \varphi_1{}^4(x)\}\,dx.$$

19. Das Trägheitsmoment J_g einer homogen mit Masse erfüllten *Kugel* von der Dichtigkeit γ und vom Radius a in bezug auf eine vom Kugelmittelpunkt um die Strecke c entfernte Gerade g ist

$$J_g = \tfrac{1}{5}M(2a^2 + 5c^2),$$

wo M die Masse der Kugel bedeutet. Dies soll bewiesen werden.

Fig. 88.

Ist J_x das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Kugelmittelpunkt (Schwerpunkt) parallel zur Geraden g gelegte Achse (x-Achse) und $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung des die Kugel durch Rotation erzeugenden Kreises, so ist nach Aufg. 18:

$$J_x = \tfrac{1}{2}\pi\gamma\int_{-a}^{a}(a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\,dx = \tfrac{8}{15}a^5\gamma\pi;$$

mit Rücksicht auf Aufg. 1, S. 341 f. folgt daher

$$J_g = \tfrac{8}{15}a^5\gamma\pi + Mc^2 = \tfrac{1}{5}M(2a^2 + 5c^2).$$

20. Das Trägheitsmoment eines homogenen geraden *Kreiskegels* von der Masse M in bezug auf seine geometrische Achse (x-Achse) ist

$$J_x = \tfrac{3}{10}a^2M,$$

wobei a den Radius der Basis bezeichnet.

21. Das Trägheitsmoment J_z eines Rotationskörpers in bezug auf eine Gerade (z-Achse), die die geometrische Achse (x-Achse) rechtwinklig schneidet, ist

$$J_z = \tfrac{1}{4}\pi\int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx + \pi\int_{x_1}^{x_2} x^2y^2\,dx,$$

falls $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve ist, deren Bogen $P_1 P_2$ durch Drehung um die x-Achse den Rotationskörper erzeugt. Dies soll bewiesen werden. Natürlich wird hierbei angenommen, daß die y-Achse durch den Schnittpunkt der z-Achse mit der x-Achse gehe.

Eine Ebene, die man im Abstande x von der yz-Ebene zu dieser parallel durch den Körper hindurchlegt, ergibt einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius $y = f(x)$, und das Trägheitsmoment dieses Schnittes in bezug auf die z-Achse ist, wie aus Aufg. 16, S. 351 und Aufg. 1, S. 341 f. hervorgeht, gleich $\frac{1}{4} y^4 \pi + x^2 y^2 \pi$. Folglich wird tatsächlich

$$J_z = \frac{1}{4} \pi \int_{x_1}^{x_2} y^4 \, dx + \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 y^2 \, dx,$$

wo vor der Integration y durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

Entsteht der Körper durch Rotation der Fläche $Q_1 P_1 P_2 Q_2$ wie in Aufg. 18, so erhält man bei Anwendung derselben Bezeichnungsweise wie dort:

$$J_z = \frac{1}{4} \pi \int_{x_1}^{x_2} \{ \varphi_2{}^4(x) - \varphi_1{}^4(x) \} \, dx + \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \{ \varphi_2{}^2(x) - \varphi_1{}^2(x) \} \, dx.$$

22. Bei einem homogenen materiellen geraden *Kreiszylinder* von der Länge l und mit einem Kreis vom Radius a als Basis erhält man für das Trägheitsmoment in bezug auf ein rechtwinklig zur Achse durch den Mittelpunkt der Basis gezogene Gerade (z-Achse) den Ausdruck

$$J_z = M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \cdot$$

23. Man bestimme das Trägheitsmoment J_z eines homogenen materiellen *Kreiskegels* von der Dichtigkeit γ und der Masse M in bezug auf einen Durchmesser der Basis; a sei der Radius der Basis, h die Höhe des Kegels.

Denkt man sich die Basis in der yz-Ebene gelegen und die Spitze des Kegels auf dem positiven Teil der x-Achse, so ist

$$y = \frac{a(h - x)}{h}$$

die Gleichung der Geraden, durch deren Rotation um die x-Achse die Kegelfläche erzeugt wird. Man erhält also

$$J_z = \frac{1}{4} \gamma \pi \int_0^h \frac{a^4 (h - x)^4}{h^4} \, dx + \gamma \pi \int_0^h \frac{a^2 x^2 (h - x)^2}{h^2} \, dx,$$

oder nach leicht auszuführender Integration:

$$J_z = \frac{1}{20} a^4 h \gamma \pi + \frac{1}{30} a^2 h^3 \gamma \pi = \frac{1}{20} M (3 a^2 + 2 h^2).$$

24. Das Trägheitsmoment des homogen mit Masse von der Dichte γ erfüllten *Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in bezug auf die x-Achse zu bestimmen.

Man kann die Bestimmung mit Hilfe eines dreifachen Integrals ausführen. Einfacher führt jedoch, nachdem durch Aufg. 11, S. 348 das Trägheitsmoment einer Ellipse in bezug auf ihre Achsen bekannt ist, folgender Weg zum Ziel.

Eine Ebene, die man im Abstand x von der yz-Ebene parallel zu dieser durch den Körper hindurchlegt, ergibt als Querschnitt die Ellipse

$$\frac{a^2 y^2}{b^2(a^2 - x^2)} + \frac{a^2 z^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1$$

mit den Halbachsen

$$b_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad c_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Trägheitsmomente J_2, J_3 dieses Querschnitts in bezug auf seine Achsen sind nach Aufg. 11: $J_2 = \frac{1}{4}\pi b_1 c_1^3$, $J_3 = \frac{1}{4}\pi b_1^3 c_1$; das Trägheitsmoment des Schnittes in bezug auf die x-Achse des Koordinatensystems ist alsdann nach Aufg. 15 gleich $J_2 + J_3$ oder $\frac{1}{4} b_1 c_1 \pi (b_1^2 + c_1^2)$.

Das Trägheitsmoment des Ellipsoids in bezug auf diese Achse wird daher

$$J_x = \frac{1}{4}\gamma\pi\int_{-a}^{a} b_1 c_1 (b_1^2 + c_1^2)\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{bc(b^2 + c^2)\gamma\pi}{a^4}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{4}{15}abc(b^2 + c^2)\gamma\pi,$$

und bei Einführung der Masse $M = \frac{4}{3}abc\gamma\pi$ folgt

$$J_x = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2).$$

Die Trägheitsmomente J_y, J_z in bezug auf die beiden anderen Achsen sind offenbar

$$J_y = \frac{1}{5}M(c^2 + a^2), \quad J_z = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

Auch mit Hilfe von Γ-Funktionen lassen sich J_x, J_y und J_z berechnen. Beschränkt man sich zunächst auf denjenigen *Ellipsoidoktanten*, in dem x, y und z positiv sind, so folgt für dessen Trägheitsmoment $\frac{1}{8}J_x$ die Gleichung

$$\frac{1}{8}J_x = \gamma\iiint(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Hier ist nun

$$\iiint y^2\,dx\,dy\,dz$$

mit Hilfe des Ergebnisses von Aufg. 19, S. 316 zu berechnen; man hat dort $q = s = 1$, $r = 3$, $m = n = p = 2$, die Funktion f gleich der Einheit zu setzen und findet hierdurch

$$\iiint y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}ab^3c\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}\int\limits_0^1 \xi^{\frac{3}{2}}\,d\xi.$$

Nun ist $\Gamma(\frac{1}{2})$ nach Aufg. 8, S. 242 gleich $+\sqrt{\pi}$ und nach Aufg. 4, S. 240 ist $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$; daher folgt

$$\iiint y^2\,dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{30}ab^3c\pi.$$

Analog ergibt sich unter den gleichen Voraussetzungen

$$\iiint z^2\,dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{30}abc^3\pi,$$

somit

$$\tfrac{1}{8}J_x = \tfrac{1}{30}abc(b^2+c^2)\gamma\pi \quad \text{und} \quad J_x = \tfrac{4}{15}abc(b^2+c^2)\gamma\pi.$$

Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel vom Radius a in bezug auf irgendeine durch den Kugelmittelpunkt gehende Achse wird offenbar

$$J = \tfrac{2}{5}a^2M.$$

25. Man bestimme das Trägheitsmoment eines homogenen *hohlen geraden Kreiszylinders* in bezug auf seine geometrische Achse (z-Achse). Die Länge des Zylinders sei l, der innere Radius der Basis sei a, der äußere a_1.

Bei Einführung von Zylinderkoordinaten (vgl. Aufg. 8, S. 310) ist $dm = \gamma r\,dz\,dr\,d\vartheta$ das Massenelement, daher wird

$$J_z = \gamma\int\limits_{z=0}^{z=l}\int\limits_{r=a}^{r=a_1}\int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} r^3\,dz\,dr\,d\vartheta = \tfrac{1}{2}\gamma\pi l(a_1^4 - a^4),$$

und bei Einführung der Masse $M = (a_1^2 - a^2)l\gamma\pi$ folgt

$$J_z = \tfrac{1}{2}M(a_1^2 + a^2).$$

Für einen vollständig mit homogener Masse erfüllten Zylinder ($a = 0$) ergibt sich

$$J_z = \tfrac{1}{2}Ma_1^2.$$

26. Das Trägheitsmoment einer Rotations*fläche* in bezug auf ihre geometrische Achse (x-Achse) zu bestimmen.

Man verfährt ähnlich wie in Aufg. 18. Eine zur Achse rechtwinklige Ebene schneidet die Fläche in einer Kreisperipherie vom Radius y, deren Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Mittelpunkt rechtwinklig zur Ebene des Kreises gelegte Achse nach Aufg. 3, S. 343 und in Analogie zu Aufg. 15, S. 350 f. gleich $2y^3\pi$ ist. Bezeichnet ds ein Bogenelement der die Fläche durch Rotation erzeugenden Kurve $y = f(x)$, so wird also

$$J_x = \int_{x_1}^{x_2} 2y^3\pi\, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

wo y noch durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

27. Das Trägheitsmoment J_z derselben Fläche in bezug auf die z-Achse des Koordinatensystems zu bestimmen.

Man verfährt ähnlich wie bei Aufg. 21. Das Trägheitsmoment der soeben in Aufg. 26 erwähnten Kreisperipherie in bezug auf die z-Achse ist, wie aus Aufg. 3, S. 343 und Aufg. 1, S. 341 f. hervorgeht, gleich $y^3\pi + x^2 \cdot 2\pi y$. Folglich wird

$$J_z = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^3\, ds + 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 y\, ds = \pi \int_{x_1}^{x_2} y(y^2 + 2x^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

wo vor der Integration y durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

28. Das Trägheitsmoment J eines materiellen Körpers in bezug auf eine Achse zu bestimmen, die durch den Anfangspunkt eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems geht und mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet.

Für das Quadrat r^2 des Abstandes eines Punktes $P(x, y, z)$ von der genannten Achse gilt, wie man leicht findet, die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

Daher wird

$$J = \iiint r^2\, dm$$

gleich einem Ausdruck von der Form

$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta,$$

wobei die bekannte Beziehung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ benutzt und zur Abkürzung

$$A = \iiint (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \iiint (z^2 + x^2)\, dm, \quad C = \iiint (x^2 + y^2)\, dm,$$
$$D = \iiint yz\, dm, \qquad E = \iiint zx\, dm, \qquad F = \iiint xy\, dm$$

gesetzt ist. Hier sind A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die Koordinatenachsen; die Größen D, E, F stellen die Zentrifugalmomente in bezug auf je ein Paar von Koordinatenebenen dar (vgl. Regel **5**, S. 341).

29. Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche und ihr Trägheitsmoment in bezug auf eine Achse sind wichtig bei der Bestimmung des *Druckmittelpunktes* einer ebenen Fläche F, auf die eine Flüssigkeit Druck ausübt. Es ist dies derjenige Punkt von F, in dem diese Fläche gestützt werden muß, wenn sie dem Gesamtdruck P das Gleichgewicht halten soll. Man beweise nun den Satz: Der Druck, den eine Flüssigkeit (rechtwinklig) gegen eine ebene Fläche vom Inhalt F, z. B. ein Stück einer ebenen Gefäßwand, ausübt, ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche gleich F und deren Höhe der senkrechte Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche vom Flüssigkeitsspiegel ist.

Fig. 89.

Nehmen wir zunächst an, die Fläche F liege in einer gegen den Spiegel der Flüssigkeit unter dem Winkel α geneigten Ebene e; mit s werde die Ebene des Flüssigkeitsspiegels bezeichnet. Die Schnittgerade von e und s wählen wir als y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, eine in der Ebene e rechtwinklig zur y-Achse gezogene Gerade als x-Achse (Fig. 89).

Der auf ein Element $dF = dx\,dy$ der Fläche F von der Flüssigkeit ausgeübte Druck ist (vgl. Aufg. 34, S. 18 und Aufg. 37, S. 19 f.)

$$dp = \gamma x \sin\alpha\, dx\, dy,$$

wo γ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit bezeichnet, der gesamte auf die Fläche ausgeübte Druck P wird daher durch einen Ausdruck von der Form

$$P = \gamma \sin\alpha \iint x\, dx\, dy \tag{1}$$

dargestellt, wobei die Integrationsgrenzen von der Begrenzung der Fläche F abhängen.

Das Integral ist nun nach Regel **4** und **6**, S. 326 f. gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F und der Abszisse ξ ihres Schwerpunktes S. Daher folgt

$$P = \gamma \sin\alpha \cdot F\xi, \tag{2}$$

und wenn man beachtet, daß $\xi \sin\alpha = t$ die senkrechte Tiefe des Punktes S unter dem Flüssigkeitsspiegel bedeutet, erhält man in der Formel $\boldsymbol{P = \gamma F t}$ den Ausdruck für den zu beweisenden Satz.

Zur Bestimmung der *Koordinaten des Druckmittelpunktes D* der Fläche F benutzt man den Satz der Statik, daß das statische Moment

der Mittelkraft (Resultante) P in bezug auf die y-Achse und in bezug auf die x-Achse je gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte $\gamma x \sin\alpha\, dx\, dy$ in bezug auf diese Achsen sein muß. Sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Koordinaten von D, so hat man daher

$$(3) \qquad P\bar{x} = \gamma \sin\alpha \iint x^2\, dx\, dy, \quad P\bar{y} = \gamma \sin\alpha \iint yx\, dx\, dy,$$

wobei P durch (1) bestimmt ist. Den Integralen sind natürlich noch Grenzen beizufügen, die von der Begrenzung der Fläche F abhängen.

Wird für P der Wert (1) eingetragen, so folgt

$$(4) \qquad \bar{x}\iint x\, dx\, dy = \iint x^2\, dx\, dy, \quad \bar{y}\iint x\, dx\, dy = \iint yx\, dx\, dy.$$

Die rechte Seite der ersten von diesen beiden Gleichungen ist nach Regel **2**, S. 340 das Trägheitsmoment J_y der Fläche F in bezug auf die y-Achse, d. h. in bezug auf die Schnittgerade der Ebene des Flüssigkeitsspiegels mit der Ebene, in der die Fläche F liegt. Die rechte Seite der zweiten Gleichung (4) ist nach Regel **5**, S. 341 das Zentrifugalmoment Z_{xy} der Fläche F in bezug auf die x- und y-Achse. Der Faktor von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ in den beiden Gleichungen (4) stellt das statische Moment S_y der Fläche F in bezug auf die y-Achse dar. Man kann somit die Gleichungen (4) in der Form

$$(5) \qquad \bar{x} = \frac{J_y}{S_y} = \frac{J_y}{F\cdot\xi}, \quad \bar{y} = \frac{Z_{xy}}{S_y} = \frac{Z_{xy}}{F\cdot\xi}$$

schreiben, wo ξ die Abszisse des Schwerpunktes S der Fläche F bedeutet.

Wie man sieht, ist die Lage des Druckmittelpunktes D in der Ebene e der Fläche F *unabhängig* von dem Winkel α, den diese Ebene mit dem Flüssigkeitsspiegel bildet. Dieser Punkt ändert also seine Lage in der Ebene e nicht, wenn man sie um die y-Achse dreht.

Hat die Fläche F eine zur y-Achse rechtwinklige Symmetrielinie, so wird man diese als x-Achse wählen; natürlich liegt alsdann der Punkt D in dieser Geraden, $\bar{y}$ ist Null.

30. Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ bilde eine vertikale Seitenwand eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes; die parallelen Seiten AB und CD (Fig. 90) haben eine Länge von $2a$ bzw. $2b$ Längeneinheiten, die Höhe des Trapezes sei h. Man bestimme den auf die Fläche ausgeübten Druck P, sowie die Lage des Druckmittelpunktes D.

Fig. 90.

Bei der aus Fig. 90 ersichtlichen Lage des Koordinatensystems haben die Seitenlinien BD und AC die Gleichungen

$$(a-b)x + hy - ah = 0, \quad \text{bzw.} \quad (a-b)x - hy - ah = 0,$$

daher sind bei dem Integral

$$P = \gamma \int_{x=0}^{x=h} \int_{y=y_1}^{y=y_2} x\, dx\, dy$$

die Grenzen der Integration nach y:

$$y_1 = \frac{(a-b)x - ah}{h}, \quad y_2 = -y_1 = \frac{(b-a)x + ah}{h},$$

man erhält somit

$$P = \frac{2\gamma}{h} \int_0^h \{(b-a)x + ah\} x\, dx = \tfrac{1}{3}\gamma(a+2b)h^2.$$

Ferner wird

$$P\bar{x} = \gamma \int_{x=0}^{x=h} \int_{y=y_1}^{y=y_2} x^2\, dx\, dy = 2\gamma \left\{ \tfrac{1}{4}(b-a) + \tfrac{1}{3} a \right\} h^3,$$

daher

$$\bar{x} = \frac{(a+3b)h}{2(a+2b)}; \quad \text{natürlich ist } \bar{y} = 0.$$

Für $a = 0$ geht das Trapez in ein gleichschenkliges Dreieck über, dessen Spitze im Flüssigkeitsspiegel liegt, im Falle $b = 0$ in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis im Flüssigkeitsspiegel liegt, für $a = b$ in ein Rechteck. In diesem letzten Fall ist also $\bar{x} = \frac{2}{3} h$, $\bar{y} = 0$.

Fig. 91.

31. In der vertikalen ebenen Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes wird ein *Rechteck* begrenzt, bei dem die Seiten von der Länge a parallel zum Wasserspiegel in der Tiefe h_1 und $h_2 > h_1$ gelegen sind; die Länge jeder der beiden anderen Seiten sei b, das Gewicht der Volumeinheit Wasser sei γ.

Hier ist bei der aus Fig. 91 ersichtlichen Lage des Koordinatensystems

$$J_y = a\gamma \int_{h_1}^{h_2} x^2\, dx = \tfrac{1}{3} a\gamma (h_2^3 - h_1^3), \quad F = ab,$$

$$\xi = h_1 + \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2);$$

ferner ist $P = \gamma F \xi$, daher wird (vgl. (5), S. 359):

$$\bar{x} = \frac{1}{3} a (h_2^3 - h_1^3) : \frac{1}{2} ab (h_1 + h_2) = \frac{2}{3} \frac{h_2^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2};$$

man findet natürlich $\bar{y} = 0$. Im Falle $h_1 = 0$ wird $\bar{x} = \frac{2}{3} h_2 = \frac{2}{3} b$ wie in Aufg. 30.

32. Eine vertikale *Mauer* von rechteckigem Querschnitt hat die Höhe h und ist auf der einen Seite bis zum oberen Rande dem Drucke von Wasser ausgesetzt. Wie dick ist die Mauer zu machen, damit sie

nicht infolge des Druckes um ihre untere, dem Wasser abgewandte Kante umkippen kann. Die Verbindung der Mauer mit dem Boden, auf dem sie steht, soll unberücksichtigt bleiben. Das Gewicht der Volumeinheit sei für das Mauerwerk gleich q, für das Wasser gleich γ; die gesuchte Mauerdicke sei δ.

Der auf ein Mauerstück von der Länge l ausgeübte Druck ist nach Aufg. 34, S. 18 gleich $\frac{1}{2}\gamma l h^2$; der Druckmittelpunkt liegt nach Aufg. 30 und 31, S. 360 in der Tiefe $\frac{2}{3}h$ unter dem Wasserspiegel oder in der Höhe $\frac{1}{3}h$ über dem Boden. Das statische Moment des Wasserdruckes ist somit $\frac{1}{2}\gamma l h^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\gamma l h^3$. Der Schwerpunkt der Mauer liegt in der Höhe $\frac{1}{2}h$ über dem Boden, im Abstand $\frac{1}{2}\delta$ von der Vorder- oder Rückseite der Mauer; in ihm wirkt ihr Gewicht $q \cdot l h \delta$ senkrecht nach unten, mit einem statischen Moment $\frac{1}{2}\delta \cdot q l h \delta$ in bezug auf die vorhin erwähnte Kante. Dieses Moment muß dem des Wasserdruckes gleich sein, man hat somit die Gleichung

$$\frac{1}{2} q l h \delta^2 = \frac{1}{6}\gamma l h^3,$$

woraus

$$\delta = h\sqrt{\frac{\gamma}{3q}}$$

hervorgeht.

33. Man bestimme den Abstand d des Druckmittelpunktes der Fläche F in Fig. 89, S. 358 von einer durch den Schwerpunkt S dieser Fläche parallel zur y-Achse gelegten Geraden; ξ sei die Abszisse des Schwerpunktes.

Jedenfalls liegt der Druckmittelpunkt tiefer als der Schwerpunkt, denn der Druck ist in den tiefer gelegenen Teilen der Fläche F größer als in den weiter oben gelegenen Teilen; es ist daher (vgl. (5), S. 359):

$$\xi + d = \bar{x} = J_y : F\xi$$

und

$$d = \frac{J_y - F\xi^2}{F\xi}.$$

Nach Aufg. 1, S. 341 f. ist aber $J_y - F\xi^2$ gleich dem Trägheitsmoment J_s der Fläche F in bezug auf eine durch ihren Schwerpunkt S parallel zur y-Achse gezogene Gerade. Man erhält daher die einfache Formel

$$d = \frac{J_s}{F\xi} = \frac{J_s}{S_y}.$$

34. Die Fläche F in Fig. 89, S. 358 sei eine *Ellipse*, bei der die eine Achse die Länge $2a$ hat und auf der x-Achse des dort benutzten Koordinatensystems liegt; die andere Achse habe die Länge $2b$. Der näher am Flüssigkeitsspiegel gelegene Endpunkt der Achse von der Länge $2a$ habe von der y-Achse den Abstand h_1, der tiefer gelegene

Endpunkt den Abstand $h_2 = h_1 + 2a$. Man soll den Druckmittelpunkt dieser elliptischen Fläche bestimmen.

Hier ist J_s nach Aufg. 11, S. 348 gleich $\frac{1}{4}a^3 b\pi$; ferner ist $\xi = h_1 + a$, $F = ab\pi$; daher wird

$$\bar{x} = \xi + d = \xi + \frac{J_s}{F\xi} = h_1 + a + \frac{a^3 b\pi}{4ab\pi(h_1 + a)}$$

oder

$$\bar{x} = \frac{4(h_1 + a)^2 + a^2}{4(h_1 + a)}.$$

35. Die Fläche F in Fig. 89, S. 358) sei ein *Halbkreis*, und zwar möge der diese Fläche begrenzende Kreisdurchmesser die Länge $2a$ haben und auf der x-Achse des dort benutzten Koordinatensystems liegen; sein Mittelpunkt habe die Abszisse $x = m$.

Hier ist $J_s = \frac{1}{8}a^4\pi$ (vgl. Aufg. 11, S. 348f.), $F = \frac{1}{2}a^2\pi$, $\xi = m$, also folgt

$$\bar{x} = \xi + \frac{J_s}{F\xi} = \frac{a^2 + 4m^2}{4m}.$$

Nach Gleichung (5), S. 359 ist

$$\bar{y} = \frac{Z_{xy}}{F\xi}, \quad \text{wobei} \quad Z_{xy} = \int\limits_{y=0}^{y=a}\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} xy\,dx\,dy.$$

Bei der Integration nach x sind $x_1 = m - \sqrt{a^2 - y^2}$ und $x_2 = m + \sqrt{a^2 - y^2}$ die Grenzen, man erhält daher

$$Z_{xy} = \int\limits_0^a 2my\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \tfrac{2}{3}a^3 m$$

und

$$\bar{y} = \frac{2}{3}a^3 m : \frac{1}{2}a^2\pi m = \frac{4a}{3\pi}.$$

§ 23.

Anwendung der Integralrechnung in der Potentialtheorie.

Nach dem Newtonschen Gesetz ist die zwischen zwei materiellen Punkten P_1 und P von den Massen m_1 und m stattfindende Anziehungskraft f dem Ausdruck

$$R = \frac{m_1 m}{r^2} \tag{1}$$

proportional, wo r die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte bedeutet. Wir wollen im folgenden die Proportionalitätskonstante gleich 1 wählen; dies bedeutet, daß man als Einheit der Anziehungskraft die

Anziehung wählt, die zwei Punkte von den Massen $m = m_1 = 1$ in der Einheit der Entfernung ($r = 1$) aufeinander ausüben.

Sind x_1, y_1, z_1 und x, y, z die rechtwinkligen Parallelkoordinaten der beiden Punkte P_1 bzw. P, so haben die den Koordinatenachsen x, y, z parallelen Komponenten X, Y, Z der Anziehung, die der Punkt P_1 auf P ausübt (Fig. 92), die Werte

$$(2) \qquad X = \frac{mm_1}{r^2}\cos\alpha, \quad Y = \frac{mm_1}{r^2}\cos\beta, \quad Z = \frac{mm_1}{r^2}\cos\gamma.$$

Fig. 92.

Hier bedeuten α, β, γ die Winkel, die die in der Richtung von P nach P_1 gezogene Gerade mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet; da bekanntlich

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z}{r}$$

ist, wird

$$(3) \qquad X = \frac{mm_1}{r^2}\frac{x_1 - x}{r}, \quad Y = \frac{mm_1}{r^2}\frac{y_1 - y}{r}, \quad Z = \frac{mm_1}{r^2}\frac{z_1 - z}{r}.$$

Aus $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ folgt nun durch partielle Differentiation

$$(4) \qquad r\frac{\partial r}{\partial x} = x - x_1, \quad r\frac{\partial r}{\partial y} = y - y_1, \quad r\frac{\partial r}{\partial z} = z - z_1,$$

so daß die Gleichungen (3) durch

$$(5) \qquad X = -\frac{mm_1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = -\frac{mm_1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = -\frac{mm_1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}$$

ersetzt werden können oder, mit Rücksicht auf

$$-\frac{m_1}{r^2} = \frac{d\frac{m_1}{r}}{dr},$$

durch

$$(6) \qquad X = m\frac{\partial\frac{m_1}{r}}{\partial x}, \quad Y = m\frac{\partial\frac{m_1}{r}}{\partial y}, \quad Z = m\frac{\partial\frac{m_1}{r}}{\partial z}.$$

Betrachtet man die Wirkung mehrerer materieller Punkte $P_1, P_2, \ldots$ mit den Massen $m_1, m_2, \ldots$ auf P und setzt man

$$|PP_i| = r_i, \quad \sum \frac{m_i}{r_i} = V,$$

so wird analog

$$(7) \qquad X = m\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = m\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = m\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Erfüllen die Massenpunkte einen Körper, eine Fläche oder einen Kurvenbogen, so geht $V = \sum \frac{m_i}{r_i}$ über in einen Ausdruck von der Form

$$V = \int \frac{dm}{r}, \tag{8}$$

wo das Integralzeichen, den soeben erwähnten drei Fällen entsprechend, eine dreifache, zweifache oder einfache Integration andeutet. In allen diesen Fällen stellen die Gleichungen (7) die Komponenten der Anziehung dar, und dies gilt auch dann noch, wenn sich der Punkt P irgendwo im Innern der anziehenden Massen befindet.[1]) Man bezeichnet diese Funktion V nach G. Green als *Potentialfunktion*, nach C. F. Gauß als *Potential*, nach W. R. Hamilton als *Kräftefunktion*[2]); für den Punkt P ist der von L. Boltzmann zuerst benutzte Name *Aufpunkt*[3]) gebräuchlich.

Man sieht, wie zur Bestimmung der zwischen einem materiellen Gebilde und einem materiellen Punkt P bestehenden Anziehungskraft im wesentlichen nur die Bestimmung des Potentials V des betreffenden Gebildes in bezug auf P erforderlich ist, denn nach Berechnung von V stellen $m\frac{\partial V}{\partial x}$, $m\frac{\partial V}{\partial y}$, $m\frac{\partial V}{\partial z}$ die rechtwinkligen Komponenten der Anziehung dar und

$$m\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

diese Anziehung selbst.

Wir erinnern daran, daß das Potential V die sogenannte Laplacesche Differentialgleichung (vgl. Teil I, S. 26)

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

erfüllt, so lange der Aufpunkt P von der einwirkenden Masse durch irgend einen, wenn auch sehr kleinen, Zwischenraum getrennt ist.

---

1) Zum Nachweis dieser letzten Tatsache vgl. man z. B. A. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 1. Bd., Leipzig 1904, S. 4 f. (Sammlung Schubert Nr. 58).

2) Schon J. Lagrange bemerkte (Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, Savants étrangers, Bd. 7, Paris 1773 = Œuvres de Lagrange, publ. par J.-A. Serret, Bd. 6, Paris 1873, S. 349 f.; Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, Jahrgang 1777, Berlin 1779, S. 156 = Œuvres, Bd. 4, Paris 1869, S. 402), daß sich im Falle des Newtonschen Anziehungsgesetzes die Komponenten der Anziehung als die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion darstellen lassen und fügte hinzu (Nouv. Mém. de l'Acad. des Sciences de Berlin, Jahrg. 1777, Berlin 1779, S. 171 f. = Œuvres, Bd. 4, Paris 1869, S. 418), daß es eine solche Funktion auch dann noch gibt, wenn die gegenseitige Anziehungskraft irgendeiner Funktion des Abstandes r proportional ist.

3) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 1. Teil, Leipzig 1891, S. 112.

Befindet sich hingegen der Punkt P irgendwo im Innern der anziehenden Masse, so besteht die von S. D. Poisson[1]) aufgestellte, aber erst von C. F. Gauß[2]) einwandfrei bewiesene Differentialgleichung

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\gamma, \tag{10}$$

wo γ die Dichtigkeit der Masse an der Stelle P bezeichnet.

Bei einem anderen Anziehungsgesetz als dem Newtonschen gelten übrigens die Gleichungen $\Delta V = 0$ bzw. $\Delta V = -4\pi\gamma$ im Raume von drei Dimensionen nicht mehr; hingegen gelten z. B. für das *logarithmische Potential* W in der *Ebene* entsprechend (9) und (10) die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

(vgl. Teil I, S. 25) bzw.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\pi\gamma.$$

Beispiele.

1. Das Potential V eines homogenen prismatischen *Stabes* von der Länge $2a$ und vom Querschnitt q in bezug auf einen in der Verlängerung der Achse des Stabes gelegenen materiellen Punkt P zu bestimmen. Dabei sei q so klein, daß bei Berechnung von V der Stab als gerade Linie von der Länge $2a$ angesehen werden kann (Fig. 93).

O Q
a a P

Fig. 93.

Der Abstand des Punktes P von der Mitte O der Geraden werde mit x bezeichnet, die Dichtigkeit des Stabes mit γ.

Das Potential dV eines unendlich kleinen Massenelementes dm, das von P um die Strecke $|PQ| = r$ entfernt ist, wird

$$dV = \frac{\gamma q\,dr}{r}, \quad \text{daher} \quad V = \gamma q\,[\ln r]_{r=x-a}^{r=x+a} = \gamma q \ln\frac{x+a}{x-a},$$

und zwar sind hier die Grenzen $x+a$ und $x-a$ zu nehmen, wenn $OP = x > +a$ ist; ist die Abszisse x von P negativ und $|x| > +a$, also $x < -a$, so wird

$$V = \gamma q \ln\frac{x-a}{x+a}.$$

---

1) Bulletin de la société philomathique, Bd. 3 (1813), S. 388.

2) „Allgemeine Lehrsätze in bezug auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, Leipzig 1840, S. 11—17, abgedruckt in C. F. Gauß Werke, Bd. 5, Göttingen 1867, S. 206—211, ferner in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 2, hrsg. von A. Wangerin, Leipzig 1889, S. 12—18.

Hat der materielle Punkt P die Masse m, so ist die von dem Stab ausgeübte Anziehung

$$X = m\frac{\partial V}{\partial x} = \mp \frac{2aq\gamma m}{x^2 - a^2} = \mp \frac{mM}{x^2 - a^2},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $x > a$ oder $< -a$ ist; M bezeichnet die Masse des Stabes.

Fig. 94.

2. Der Punkt P befinde sich nun an einer beliebigen Stelle der Ebene, nur nicht im Innern oder auf der Oberfläche des Stabes.

Bezogen auf das aus Fig. 94 ersichtliche Koordinatensystem ξ, η habe P die Koordinaten $\xi = x$, $\eta = y$. Ein Volumelement des Stabes AB hat die Masse $\gamma q d\xi$, daher folgt

$$V = \gamma q \int \frac{d\xi}{r} = \gamma q \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{+\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}}$$

oder (vgl. Aufg. 49, S. 90 und Aufg. 1, S. 182)

$$V = \gamma q \ln\left[\xi - x + \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}\right]_{\xi = -a}^{\xi = +a} = \gamma q \ln \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2} + a - x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a - x}.$$

Hieraus ergibt sich

$$X = m\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma q m \left\{\frac{-1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}\right\},$$

also mit Rücksicht auf Fig. 94:

$$X = \gamma q m \left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right);$$

ferner wird

$$Y = m\frac{\partial V}{\partial y} = \gamma q m \left\{\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2} + a - x} \cdot \frac{y}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a - x} \cdot \frac{y}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}\right\},$$

und wenn man das erste Glied der Klammer mit $\sqrt{(a-x)^2 + y^2} - (a-x)$, das zweite mit $\sqrt{(a+x)^2 + y^2} + a + x$ erweitert, so folgt

$$Y = -\frac{\gamma q m}{y}\left\{\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}\right\} = -\frac{\gamma q m}{y}\left\{\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right\}.$$

3. Man berechne die in Aufg. 2 bestimmten Komponenten X und Y direkt, also ohne Benutzung des Potentials V.

Hier wird

$$X = \gamma q m \int \frac{(\xi - x) d\xi}{r^3} = \gamma q m \int_{-a}^{+a} \frac{(\xi - x) d\xi}{\{(\xi - x)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

woraus mit Rücksicht auf Aufg. 13, S. 177:

$$X = -\gamma q m \left[\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} \right]_{\xi = -a}^{\xi = +a}$$

hervorgeht, derselbe Wert wie in Aufg. 2. Ferner wird

$$Y = -\gamma q m \int \frac{y d\xi}{r^3} = -\gamma q m \int_{-a}^{+a} \frac{y d\xi}{\{(\xi - x)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

also mit Rücksicht auf Aufg. 14, S. 177:

$$Y = -\frac{\gamma q m}{y} \left[\frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} \right]_{\xi = -a}^{\xi = +a},$$

wie in Aufg. 2.

Für die Resultante $R = +\sqrt{X^2 + Y^2}$ der beiden Komponenten X, Y ergibt sich leicht

$$R = + \frac{\gamma q m \sqrt{2}}{y} \sqrt{1 - \frac{y^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2} \sqrt{(a + x)^2 + y^2}}},$$

und bei Einführung von Sinus und Kosinus der Winkel $CPA = \alpha$ und $CPB = \beta$ (Fig. 94) folgt

$$R = + \frac{\gamma q m \sqrt{2}}{y} \sqrt{1 - (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)} = \frac{2 \gamma q m}{y} \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Beachtet man, daß $2 \gamma q y \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ die Masse M der zum Zentriwinkel $\alpha + \beta$ gehörigen Sehne EF (Fig. 94) eines Kreises vom Radius y darstellt, so wird

$$R = \frac{mM}{y^2}.$$

Denkt man sich also im Mittelpunkt S des zur Sehne EF gehörigen Kreisbogens die Masse M konzentriert, so ist die von ihr auf P ausgeübte Anziehungskraft so groß wie die Anziehungskraft R des Stabes AB. Es läßt sich leicht zeigen, daß auch die Richtungen der beiden Kräfte übereinstimmen, doch möge dieser Nachweis dem Leser überlassen werden.

4. Man bestimme das Potential V einer *kreisförmigen Scheibe* vom Radius a und von sehr geringer Dicke δ in bezug auf einen senkrecht über dem Mittelpunkt der Scheibe im Abstand z befindlichen Punkt P

(Fig. 95). Die Dichtigkeit der Scheibe sei γ und die Dicke δ so klein, daß bei Bestimmung von V die Scheibe als Kreisfläche betrachtet werden kann. Bei Anwendung von Polarkoordinaten r, ϑ in der Ebene des Kreises ist $r\,dr\,d\vartheta\cdot\delta$ das Volumen und $\gamma\delta\cdot r\,dr\,d\vartheta$ die Masse eines Elementes der Scheibe. Daher wird

$$V=\int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r=a}\frac{\gamma\delta\,r\,dr\,d\vartheta}{\sqrt{r^2+z^2}}=2\pi\gamma\delta\int\limits_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

oder

$$V=2\pi\gamma\delta\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_{r=0}^{r=a}=2\pi\gamma\delta\left\{\sqrt{a^2+z^2}-z\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Scheibe und die symmetrische Lage des Punktes P kommt nur die Z-Komponente der Anziehung in Betracht. Man findet

$$Z=m\frac{\partial V}{\partial z}=2\pi\gamma\delta m\left\{\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right\}=-2\pi\gamma\delta m z\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right\},$$

und bei Einführung der Masse der Scheibe $M=a^2\pi\gamma\delta$ sowie der Länge $t=\sqrt{a^2+z^2}$ der Strecke, die man von P nach einem beliebigen Punkt des Scheibenrandes ziehen kann, folgt

$$Z=-\frac{2Mmz}{a^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right).$$

5. Das Potential und die Anziehungskraft einer *Hohlkugel* (Kugelschale) zu bestimmen, und zwar a) in bezug auf einen außerhalb gelegenen Punkt, b) in bezug auf einen Punkt des inneren Hohlraumes, c) in bezug auf einen in der Masse der Schale befindlichen Punkt. Dabei

Fig. 95.

Fig. 96.

sei die Dichtigkeit γ der Schale an irgend einer Stelle eine Funktion $\gamma=\varphi(r)$ des Abstandes vom Mittelpunkt; die Radien der die Kugelschale begrenzenden Kugeloberflächen seien a_1 und $a_2>a_1$, die Entfernung des Aufpunktes P vom Mittelpunkt der Schale sei z.

Obenstehende Figur 96 stellt den Schnitt der Kugelschale mit derjenigen Meridianebene dar, in der der Punkt P liegt; ferner ist

$OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $OP = z$. Bei Anwendung räumlicher Polarkoordinaten mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt O der Kugelschale und mit der schon in Aufg. 23, S. 290 sowie in Aufg. 20, S. 317 benutzten und zum Teil aus Fig. 96 ersichtlichen Bezeichnungsweise ergibt sich für ein an der Stelle Q befindliches Massenelement der Kugelschale der Ausdruck $\varphi(r) r^2 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\vartheta$. Daher wird

$$V = \iiint \frac{\varphi(r) r^2 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\vartheta}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\psi}}. \tag{1}$$

Wir wollen zunächst das Potential dV einer *unendlich dünnen* Kugelschale bestimmen, der die Radien r und $r + dr$ zugehören. Offenbar ist hierbei die Integration über ϑ (die geographische Länge) von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ zu erstrecken; da ferner in diesem Fall $\varphi(r) r^2 dr$ als ein konstanter Faktor zu betrachten ist, folgt

$$\begin{aligned} dV &= \varphi(r) r^2 dr \cdot 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin\psi \, d\psi}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\psi}} \\ &= \frac{2\pi\varphi(r) r \, dr}{z} \left[\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\psi}\right]_{\psi=0}^{\psi=\pi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ist nun a) der Punkt P *außerhalb* der Kugelschale gelegen, so sind $z + r$ und $z - r$ die zu den Grenzen π und 0 von ψ gehörigen Werte der Quadratwurzel $w = +\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\psi}$; daher wird in diesem Fall

$$dV = \frac{2\pi\varphi(r) r \, dr}{z} \cdot 2r = \frac{4\pi}{z} \varphi(r) r^2 dr. \tag{3}$$

Liegt b) der Punkt P *im inneren Hohlraum*, so sind $r + z$ und $r - z$ die zu $\psi = \pi$ und $\psi = 0$ gehörigen Werte von w, und man erhält

$$dV = \frac{2\pi\varphi(r) r \, dr}{z} \cdot 2z = 4\pi\varphi(r) r \, dr. \tag{4}$$

Nun ist auch das Potential einer *Kugelschale S von endlicher Dicke* leicht zu bestimmen. Im Falle a) erhält man

$$V = \frac{1}{z} \int_{a_1}^{a_2} 4\pi\varphi(r) r^2 dr, \tag{5}$$

oder da das Integral offenbar die Masse M der Kugelschale darstellt (denn $4\pi r^2 dr$ ist das Volumen der unendlich dünnen Kugelschale), so folgt

$$V = \frac{M}{z}. \tag{6}$$

Im Falle b) wird

$$V = 4\pi \int_{a_1}^{a_2} \varphi(r) r \, dr, \tag{7}$$

also von z unabhängig, und wenn insbesondere auch $\varphi(r) = \gamma$ konstant ist, ergibt sich

$$V = 2\pi\gamma(a_2^2 - a_1^2). \tag{8}$$

Befindet sich endlich c) der Punkt P *in der Masse der Kugelschale* S, so legt man durch ihn eine mit der Schale konzentrische Kugeloberfläche und kann nun das Potential aus zwei Teilen V_1, V_2 additiv zusammensetzen. Der eine von diesen beiden Teilen, V_1, bezieht sich auf eine Kugelschale K_1, deren Begrenzungsflächen die Radien a_1 und $z > a_1$ haben; der andere Teil V_2 bezieht sich auf eine Schale K_2, deren Begrenzungsflächen die Radien $z < a_2$ und a_2 haben. Für K_1 kann P als ein äußerer Punkt, für K_2 als Punkt des inneren Hohlraumes angesehen werden. Nach den soeben für die Fälle a) und b) abgeleiteten Ergebnissen folgt alsdann:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{z}\int_{a_1}^{z} 4\pi\varphi(r)r^2 dr + 4\pi\int_{z}^{a_2}\varphi(r)r\,dr, \tag{9}$$

und im Falle konstanter Dichtigkeit $\varphi(r) = \gamma$:

$$V = \frac{4\pi\gamma}{3z}(z^3 - a_1^3) + 2\pi\gamma(a_2^2 - z^2). \tag{10}$$

Für eine *Vollkugel* $(a_1 = 0,\ a_2 = a)$ erhält man bei konstanter Dichtigkeit:

(11) im Falle a) $\qquad V = \frac{4}{3}\pi\gamma\frac{a^3}{z} = \frac{M}{z}$

(12) im Falle c) $\qquad V = 2\pi\gamma a^2 - \frac{2}{3}\pi\gamma z^2.$

Liegt der Punkt auf der Kugeloberfläche $(z = a)$, so folgt aus (11) und aus (12) der Wert $V = \frac{4}{3}\pi\gamma a^2$.

Die *Anziehung der Kugelschale* auf den Punkt P von der Masse m wird im Falle a)

$$Z = m\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{mM}{z^2}, \tag{13}$$

d. h. die *Anziehung ist nach* (1) S. 362 *dieselbe, als wäre die ganze Masse der Kugel in deren Mittelpunkt vereinigt.*

Im Falle b) erhält man $Z = 0$, denn hier ist V von z unabhängig. *Die Wirkung einer Kugelschale auf einen Punkt des inneren Hohlraumes ist daher Null.*

Im Falle c) folgt aus (9) unter Anwendung der Regel für die Differentiation eines bestimmten Integrals nach seiner oberen oder unteren Grenze (Regel **1**, S. 221):

$$Z = -\frac{m}{z^2}\int_{a_1}^{z} 4\pi\varphi(r)r^2 dr + \frac{4\pi m}{z}\cdot\varphi(z)z^2 - 4\pi m\varphi(z)z$$

oder

$$(14) \qquad Z = -\frac{m}{z^2}\int_{a_1}^{z} 4\pi\varphi(r)r^2 dr,$$

wo das Integral die Masse M_1 der oben mit K_1 bezeichneten Kugelschale darstellt. Hier wird also

$$(15) \qquad Z = -\frac{mM_1}{z^2},$$

die Wirkung ist dieselbe, als wäre die Masse von K_1 im Mittelpunkt der Kugelschale vereinigt.

Die Formeln (13) und (15) gelten auch für die *Anziehung einer Vollkugel* vom Radius a ($a_1 = 0$, $a_2 = a$), wenn M die Masse dieser Kugel und M_1 die Masse der Kugel vom Radius z darstellt. Ist insbesondere die *Dichtigkeit konstant* und der *Punkt P im Inneren* gelegen, so ist $M_1 = \frac{4}{3}\pi\gamma z^3$, daher

$$Z = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma m z,$$

die Anziehung ist proportional dem Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt der Kugel.

6. Die Anziehung Z einer Vollkugel auf einen in ihrem Inneren im Abstand z vom Mittelpunkt befindlichen Punkt von der Masse m zu bestimmen, wenn die Dichtigkeit γ vermöge der Gleichung

$$\gamma = (c - r)k,$$

wo c und k positive Konstanten sind, von r abhängt.

Nach (14) in Aufg. 5 erhält man

$$(1) \qquad Z = -\frac{m}{z^2}\int_0^z 4\pi(c-r)kr^2 dr = -m\pi k\left(\frac{4}{3}c - z\right)z.$$

Es möge nun die *allerdings ganz willkürliche Annahme* gemacht werden, daß sich bei der Erde, diese als Kugel vom Radius R betrachtet, die Dichtigkeit der Formel

$$(2) \qquad \gamma = (c - r)k$$

entsprechend ändert.[1]) Dabei möge als mittlere Dichte der ganzen Erde $\gamma_m = 5{,}5$ (bezogen auf die Dichte des Wassers als Einheit), als mittlere Dichte der obersten Schichten $\gamma_0 = 2{,}5$ angenommen werden. Es lassen

1) Vgl. für das Folgende E. Grimsehl, Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung, 1. Bd., Leipzig 1905, S. 57—60 (Sammlung Schubert, Bd. 38).

sich dann die Konstanten c und k leicht berechnen. Drückt man nämlich die bekannte Masse der Erde $M = \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot 5{,}5$ durch das Integral

$$M = \int_0^R 4 r^2 \pi (c - r) k \, dr \tag{3}$$

aus, so erhält man die Gleichung

$$4 k \pi \left(\frac{c R^3}{3} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot 5{,}5 \quad \text{oder} \quad (4c - 3R) k = 22; \tag{4}$$

außerdem ist mit Rücksicht auf die obersten Schichten der Erde:

$$(c - R) k = 2{,}5 . \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich

$$c = \frac{14{,}5}{12} R, \quad k = \frac{12}{R} \cdot$$

Für die Dichte im Erdmittelpunkt ($r = 0$) würde man unter der gemachten Annahme (2) den Wert $\gamma = ck = 14{,}5$ erhalten.

Aus (1) folgt, daß der absolute Wert der Anziehungskraft für $z = \frac{2}{3} c$ ein Maximum wird; dies würde einer Entfernung $z = \frac{2 \cdot 14{,}5}{3 \cdot 12} R$ oder rund $\frac{4}{5} R$ vom Mittelpunkt der Erde entsprechen.

Sachregister.

Die Zahlen bezeichnen im allgemeinen die Seiten; nur wenn das Zeichen § vor einer Zahl steht, bezieht sie sich auf einen Paragraphen.